Die P = NP Frage

Ideen der Informatik

Kurt Mehlhorn

Adrian Neumann

max planck institut
informatik

Gliederung

- Ziele von Theorie
- Die P = NP Frage
  - P = Menge der Probleme, bei denen eine Lösung in Polynomzeit gefunden werden kann.
  - NP = Menge aller Probleme, bei denen die Korrektheit eines Lösungvorschlags in Polynomzeit überprüft werden kann.
- Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SATisfiability Problem): das prototypische Problem für NP.
- Satz von Cook-Levin: P = NP genau wenn SAT $\in$ P .
- Was wäre, wenn P $\neq$ NP?
- Was wäre, wenn P $=$ NP?

Ziele der Komplexitätstheorie

Ziel einer jeden Theorie: schaffe Einsicht und Ordnung

Hier:

- Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik, Rucksackproblem, Problem des Handlungsreisenden, Graphenfärbung und tausend andere Probleme sind alle gleich schwer: falls es für eines diese Probleme einen effizienten Algorithmus gibt, dann für alle.
- es gibt einen Polynomzeitalg für eines diese Probleme, wenn zwischen Beweisen und Überprüfen eines Beweises kein wesentlicher Unterschied besteht. Das ist die P = NP Frage.

P = die Klasse der effizient lösbaren Probleme

P = Menge, der in Polynomzeit lösbaren Probleme

Ein Problem ist in P, wenn es eine Programm M und eine natürliche Zahl k gibt, so dass

- M für jede Problemstellung x die richtige Anwort liefert, und
- seine Laufzeit an Eingabe x beschränkt ist durch $c \cdot |x|^k$; dabei ist $|x|$ die Länge von x (Anzahl der Zeichen) und c eine Konstante (die nicht von x abhängt).

P = die Klasse der effizient lösbaren Probleme

P = Menge, der in Polynomzeit lösbaren Probleme

Ein Problem ist in P, wenn es eine Programm M und eine natürliche Zahl k gibt, so dass

- M für jede Problemstellung x die richtige Anwort liefert, und
- seine Laufzeit an Eingabe x beschränkt ist durch $c \cdot |x|^k$; dabei ist $|x|$ die Länge von x (Anzahl der Zeichen) und c eine Konstante (die nicht von x abhängt).

$k = 1$, lineare Laufzeit, $k = 2$, quadratische Laufzeit,...

Beispiele: kürzeste Wege, Sortieren, Lösen von linearen Gleichungen, ...

P = die Klasse der effizient lösbaren Probleme

P = Menge, der in Polynomzeit lösbaren Probleme

Ein Problem ist in P, wenn es eine Programm M und eine natürliche Zahl k gibt, so dass

- M für jede Problemstellung x die richtige Anwort liefert, und
- seine Laufzeit an Eingabe x beschränkt ist durch $c \cdot |x|^k$; dabei ist $|x|$ die Länge von x (Anzahl der Zeichen) und c eine Konstante (die nicht von x abhängt).

Glaubenssatz der Informatik: nur Algorithmen mit polynomieller Laufzeit sind gut.

Verdoppelung der Problemgröße vergrößert Laufzeitschranke von

$$c \cdot |x|^k \quad \text{auf} \quad c \cdot (2|x|)^k = 2^k \cdot c \cdot |x|^k,$$

also nur um den Faktor 2^k. $k = 1$, Faktor 2, $k = 2$, Faktor 4, ... Bei linearer Laufzeit verdoppelt sich die in 1h lösbare Problemgröße alle zwei Jahre.

P = die Klasse der effizient lösbaren Probleme

P = Menge, der in Polynomzeit lösbaren Probleme

Ein Problem ist in P, wenn es eine Programm M und eine natürliche Zahl k gibt, so dass

- M für jede Problemstellung x die richtige Anwort liefert, und
- seine Laufzeit an Eingabe x beschränkt ist durch $c \cdot |x|^k$; dabei ist $|x|$ die Länge von x (Anzahl der Zeichen) und c eine Konstante (die nicht von x abhängt).

exponentielle Laufzeit $c \cdot a^{|x|}$: Vergrößerung der Problemgröße um Eins vergrößert die Laufzeitschranke von

$$c \cdot a^{|x|} \text{ auf } c \cdot a^{|x|+1} = a \cdot (c \cdot a^{|x|}),$$

d.h. um den Faktor a.

$a = 2$: Verdoppelung der Laufzeit

Aufgaben

- Wir haben einen Algorithmus, dessen Laufzeit an der Eingabe x durch $|x|^3$ beschränkt ist.

  Verdoppelung der Eingabegröße erhöht die Laufzeitschranke um nicht mehr als den Faktor 3, 8, oder 9?
- Wir haben einen Algorithmus, dessen Laufzeit an der Eingabe x linear in $|x|$ wächst. Nehmen wir ferner an, dass sich die Geschwindigkeit von Rechnern jedes Jahr verdoppelt.
  Wenn wir heute Eingaben mit $|x| \leq 10^4$ in 1h bearbeiten können, was geht dann in 4 Jahren?
- Wir haben einen Algorithmus mit der Laufzeit $c \cdot 2^{|x|}$ für eine Konstante c. Wenn wir heute Eingaben mit $|x| \leq 10^4$ in 1h bearbeiten können, was geht dann in 4 Jahren?

Beispiele für Probleme in NP

NP = Menge aller Probleme, bei denen die Korrektheit eines Lösungvorschlags in Polynomzeit überprüft werden kann.

Rucksackproblem

Gegeben sind n Objekte und zwei Zahlen G und W. Das i-te Object hat Gewicht g_i und Wert w_i.

Gibt es eine Teilmenge der Objekte, die Gesamtgewicht höchstens G und Wert mindestens W hat?

Lösungsvorschlag:

Überprüfung.

Beispiele für Probleme in NP

Problem des Handlungsreisenden

Gibt es eine Tour durch die alle Orte Deutschlands mit mehr als 5 Tausend Einwohnern, die höchstens 4000 Kilometer lang ist?

Allgemein: Gegeben ist ein Graph, für jede Kante ihre Länge, und eine Zahl L.
Gibt es eine Rundreise, die alle Knoten besucht und Länge höchstens L hat?

Lösungsvorschlag:

Überprüfung.

Aufgabe

Zeigen sie, dass das Cliquenproblem in NP ist:

Eingabe: Graph G und eine Zahl k

Frage: gibt es Teilmenge von k Knoten, in der jeder Knoten mit jedem anderen verbunden ist?

Was ist ein Lösungsvorschlag?

Wie überprüfen sie einen Lösungsvorschlag?

SAT: das prototypische Problem in NP

Das Erfüllbarkeitsproblem (SATisfiability-Problem)

Eingabe: Eine Formel der Aussagenlogik

Frage: Ist die Formel erfüllbar, d.h., gibt es eine Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten Wahr (W) und Falsch (F), die die Formel erfüllt?

Formeln der Aussagenlogik: Wahrheitswerte und Variablen verknüpft mit und ($\wedge$), oder ($\vee$) und Negation ($\neg$). Details auf nächster Folie.

Beispiel

Formel: $(x \vee y) \wedge \neg x$

Belegung 1: $x \to W$, $y \to F$, dann $(W \vee F) \wedge \neg W = W \wedge F = F$

Belegung 2: $x \to F$, $y \to W$, dann $(F \vee W) \wedge \neg F = W \wedge W = W$

Formeln der Aussagenlogik

(1) W (true, wahr), F (falsch, false) und Variablen sind Formeln.

(2) Wenn F und G Formeln sind, dann auch $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, und $\neg F$.

Belegung, Wert einer Formel, erfüllbar

Eine Belegung weist jeder Variablen einen Wahrheitswert zu.

Der Wert der Formel ergibt sich nach folgenden Regeln:

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$\neg x$
F	F	F	F	W
F	W	W	F	W
W	F	W	F	F
W	W	W	W	F

Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Belegung gibt, unter der sie den Wert wahr erhält.

Algorithmen für SAT, Rucksack, Handlungsreisender, ...

SAT: probiere alle Belegungen durch und finde heraus, ob es eine erfüllende gibt.

Bei n Variablen gibt es 2^n mögliche Belegungen.

Rucksack: probiere alle Teilmengen der Objekte durch und ....

Bei n Variablen gibt es 2^n mögliche Belegungen.

Handlungsreisender: probiere alle möglichen Touren aus und ....

Bei n Städten gibt es $n!$ mögliche Rundreisen.

Alle bekannten Algorithmen haben exponentielle Laufzeit im schlechtesten Fall.

Aufgaben

Gib eine Formel in den Variablen x, y und z an, die genau dann wahr ist, wenn mindestens eine der Variablen wahr ist.

Gib eine Formel in den Variablen x, y und z an, die genau dann wahr ist, wenn mindestens zwei der Variablen wahr sind.

Gib eine Formel in den Variablen x, y und z an, die genau dann wahr ist, wenn genau eine der Variablen wahr ist.

Zeigen Sie: SAT $\in$ NP.

Lösungsvorschlag:

Überprüfung:

Der Satz von Cook/Levin

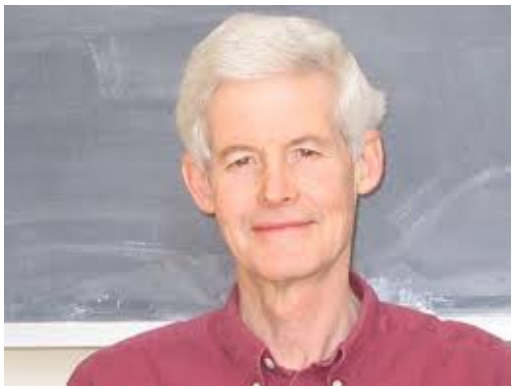
NP = Menge aller Probleme, bei denen die Korrektheit eines Lösungvorschlags in Polynomzeit überprüft werden kann.

Satz (Stephen Cook und Leonid Levin, 71)

P = NP genau wenn SAT $\in$ P

Ich zeige: SAT $\in$ P impliziert Graphenfärbung $\in$ P.

Theorie schafft Einsicht.



Cook: Turing Award
Levin: Knuth Prize.

Graphenfärbung ist nicht schwerer als SAT

Graphenfärbung (mit drei Farben)

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es eine Färbung der Knoten von G mit den Farben rot, blau, und grün, so dass die Endpunkte einer jeden Kante verschieden gefärbt sind?

Graphenfärbung ist nicht schwerer als SAT

Graphenfärbung (mit drei Farben)

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: Gibt es eine Färbung der Knoten von G mit den Farben rot, blau, und grün, so dass die Endpunkte einer jeden Kante verschieden gefärbt sind?

Satz: Falls SAT effizient lösbar ist, dann ist auch Graphenfärbung effizient lösbar (Färbung $\leq$ SAT).

Gegeben ein Graph G, konstruiere eine Formel F mit:

- G ist dreifärbbar genau wenn F erfüllbar ist.
- die Konstruktion von F aus G ist in Polynomzeit durchführbar.

Graphenfärbung ist nicht schwerer als SAT

Satz: Falls SAT effizient lösbar ist, dann ist auch Graphenfärbung effizient lösbar (Färbung $\leq$ SAT).

Gegeben ein Graph G, konstruiere eine Formel F mit:

- G ist dreifärbbar genau wenn F erfüllbar ist.
- die Konstruktion von F aus G ist in Polynomzeit durchführbar.

Färbungsalgorithmus: an Eingabe G tue:

- Konstruiere F.
- Entscheide Erfüllbarkeit von F mit Hilfe des SAT-Algorithmus.

Alg ist korrekt und effizient.

Reduktion: Färbung $\leq$ SAT

Variable u_c für Knoten $u \in V$ und Farbe $c \in \{ R, B, G \}$.

Intendierte Bedeutung: $u_c = W$ bedeutet u hat die Farbe c.

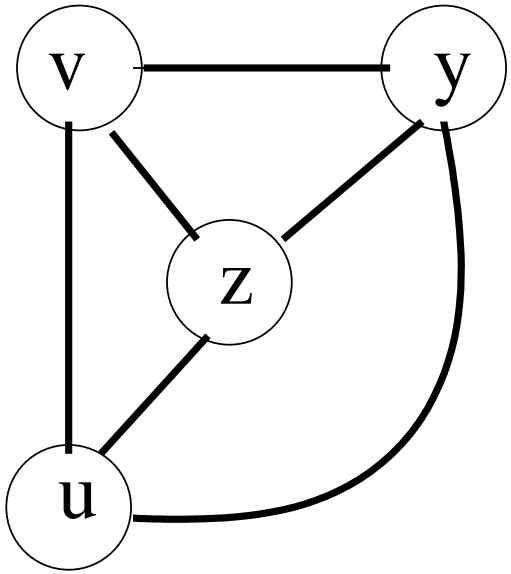
Was müssen wir ausdrücken?

- Jeder Knoten hat eine eindeutige Farbe: $\bigwedge_{u \in V} GE(u_R, u_B, u_G)$.
  Dabei ist $GE(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \wedge \neg (xy \vee xz \vee yz)$ GenauEine
- Nicht, es gibt eine Kante $\{ u, v \}$, so dass u und v die gleiche Farbe haben. $\neg \left(\bigvee_{\{ u,v \} \in E} u \text{ und } v \text{ haben die gleiche Farbe} \right)$.
- u und v haben die gleiche Farbe: $u_R v_R \vee u_B v_B \vee u_G v_G$.

Insgesamt

$$\bigwedge_{u \in V} GE(u_R, u_B, u_G) \wedge \neg \bigvee_{\{ u,v \} \in E} (u_R v_R \vee u_B v_B \vee u_G v_G)$$

Aufgabe



- Ist der Graph dreifärbbar? JA oder NEIN?
- Gib die Formel für die Existenz eine Dreifärbung an.
- Streiche eine beliebige Kante und ändere die Formel entsprechend ab.
- Finde eine erfüllende Belegung und leite daraus die Dreifärbung ab.

NP-Vollständigkeit (Satz von Karp)

Definition

Ein Problem L in NP ist NP-vollständig, wenn aus $L \in P$ folgt $P = NP$.

Cook-Levine bewiesen, dass das Erfüllbarkeitsproblem NP-vollständig ist.

Satz (Karp, 1972)

Das Graphenfärbungsproblem, das Hamiltonsche Kreisproblem, Knapsack, und 20 andere Probleme sind NP-vollständig.

Die Liste ist inzwischen auf mehrere Tausend angewachsen: Theorie schafft Ordnung.

Richard Karp, Turing-Award in 1985.

Die P = NP Frage (Geschichte)

- P = Menge aller Probleme, die in Polynomzeit lösbar sind
- NP = Menge aller Probleme, bei denen die Korrektheit eines Lösungvorschlags in Polynomzeit überprüft werden kann.
- 1970: man hatte effiziente Algorithmen für kürzeste Wege, Paarungsprobleme, Flussprobleme, aber es gab auch viele Probleme, die man nicht effizient lösen konnte.
- 71,72: Cook, Levin und Karp haben Ordnung in dieses Chaos gebracht. Viele dieser Probleme sind zu SAT äquivalent. $SAT \in P$ impliziert P = NP.
- Clay Foundation gibt 1 Mio $ Preisgeld für Lösung eines der 6 großen offenen Probleme der Mathematik
- Frage hat grundlegende philosophische/mathematische Bedeutung (ist Beweisen schwerer als Prüfen?)

  Gleichheit hätte enorme algorithmische Konsequenzen

War wäre, wenn P $\neq$ NP?

- es würde sich nicht viel ändern.
- da wir keinen Polynomzeitalgorithmus für das Erfüllbarkeitsproblem kennen, leben wir faktisch in einer Welt, in der P ungleich NP ist.
- die meisten Fachleute glauben, dass P $\neq$ NP?
- aber: im Augenblick gibt es keinen Ansatz, wie man P $\neq$ NP beweisen könnte. Man weiß nur, dass einige natürliche Ansätze NICHT funktionieren können.

  Wenn man einen Beweis findet, muss dieser eine neue Methode einführen. Diese Methode könnte weitere Anwendungen haben.
- alle paar Jahre wird ein (falscher) Beweis angekündigt.

War wäre, wenn P = NP?

- das wäre eine Revolution
- wir hätten Polynomzeitalgorithmen für Erfüllbarkeit, ...,
- Mathematiker würden arbeitslos:

  Input: ein mathematischer Satz S, eine Anzahl n unbeschriebener Blätter

  Frage: gibt es einen Beweis für S (in einem formalen System), der auf die n Blätter passt?

  Dieses Problem ist in NP. Falls P = NP, dann ist dieses Problem in P.
- Philosophen müssten neu über den Begriff Kreativität nachdenken.
- alle paar Monate wird ein (falscher) Beweis angekündigt.

Wie geht man mit NP-Vollständigkeit um?

Nur weil ein Problem schwer ist, verschwindet es nicht.

NP-Vollständigkeit bedeutet: man kennt keinen Algorithmus, der jede Problemstellung in Polynomzeit löst. Es kann durchaus Algorithmen geben, die viele (interessante) Instanzen in Polynomzeit lösen.

Folgende Ansätze gibt es:

- Heuristiken
- Exakte Algorithmen für kleine n
- Speziallfälle
- Approximationsalgorithmen

Zusammenfassung

- P = Menge der Probleme, bei denen eine Lösung in Polynomzeit gefunden werden kann
- NP = Menge aller Probleme, bei denen die Korrektheit eines Lösungvorschlags in Polynomzeit überprüft werden kann.
- P = NP genau wenn es einen polynomiellen Algorithms für das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SATisfiability Problem) gibt.
- P = NP, eines der großen offenen Probleme der Informatik/Mathematik (Clay Prize)
- Falls P $\neq$ NP, dann ...
- Falls P $=$ NP, dann ...