max planck institut
informatik

Ideen und Konzepte der Informatik

Kürzeste und Schnellste Wege

Wie funktioniert ein Navi?

Kurt Mehlhorn

Schnellste Wege – Routen finden im Navi

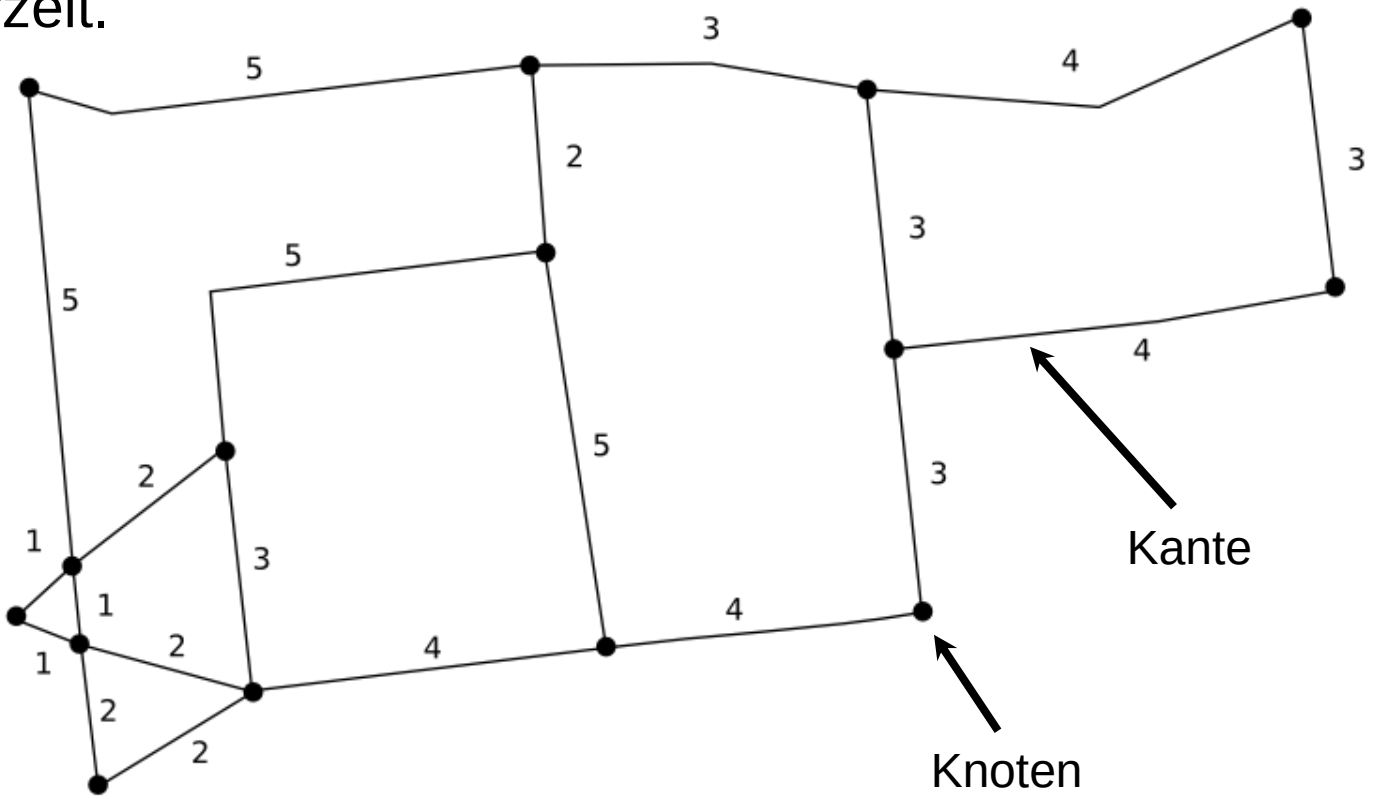
- Karten und Graphen
- Schnellste und kürzeste Wege sind das gleiche Problem; Länge einer Verbindung in Metern oder Sekunden. Schnell = kurz bzgl. Zeit.
- Algorithmen für schnellste Wege
  - Erster Versuch
  - Dijkstras Algorithmus
- Schnellste Wege in Straßengraphen

Landkarten

Landkarten enthalten sehr viele Informationen; nur Straßengraph ist wichtig

Graphen als Abstraktion

Graphen bestehen aus Knoten und Kanten. Jede Kante hat eine Fahrzeit.



Graph G = (V,E), Knoten V, Kanten E, E Teilmenge V x V

Straßennetzwerke

- Europa: 24 Millionen Knoten, 58 Millionen Kanten
- Schnellste Wege kann man trotzdem in Sekunden berechnen
- Oder in Millisekunden nachschlagen
- Algorithmen arbeiten auf dem Graphen und zeigen Ergebnis auf der Karte
- Fahrzeit über eine Kante
  - Länge / angenommene Durchschnittsgeschwindigkeit
  - Tatsächlich bekannt durch Beobachtung

Algorithmen für schnellste Wege: Grundidee

Wenn ich vom Startknoten in 30 Minuten nach A komme

und

von A nach B in 5 Minuten,

dann komme ich in 35 Minuten vom Startknoten nach B.

Ein erster Algorithmus

1. Fahrzeit von Start nach Start = 0 Minuten

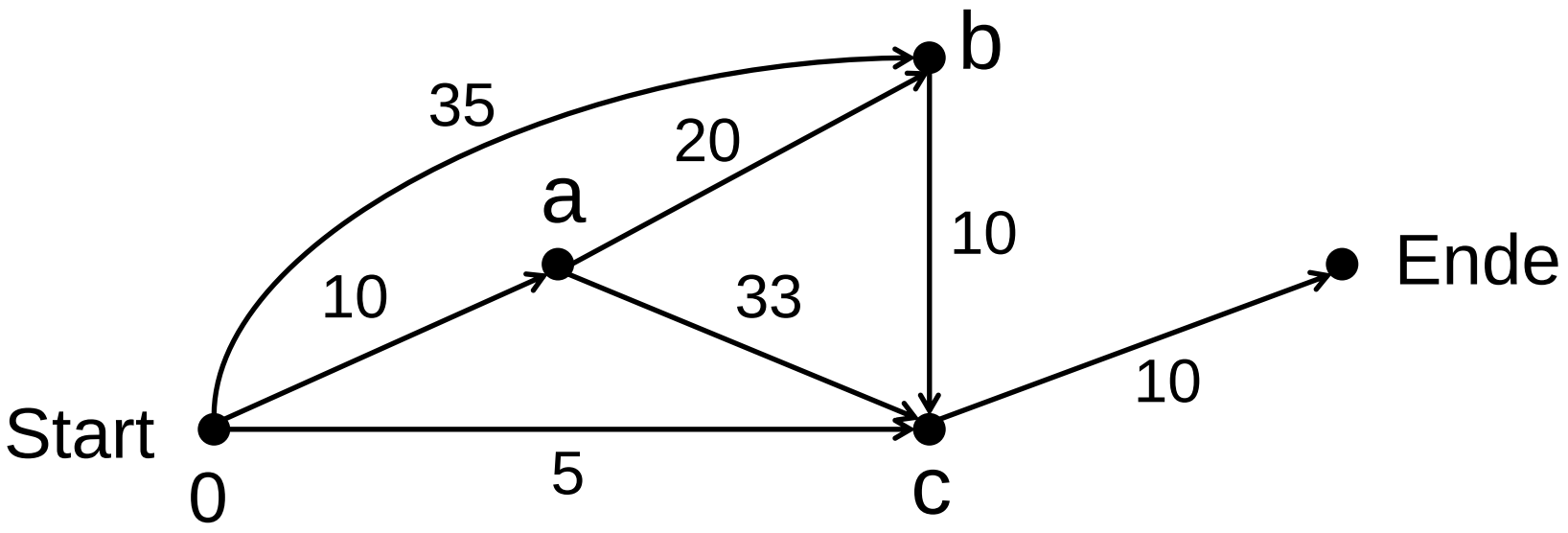
2. Für alle anderen Knoten weiß ich noch keinen Weg: also Fahrzeit = unendlich

3. Falls Fahrzeit nach A = X Minuten und Straße A → B braucht Y Minuten, dann

   Fahrzeit nach B = min(X+Y, schon bekannte Fahrzeit nach B).

4. Wiederhole 3. solange noch eine Fahrzeit verbessert werden kann

Beispiel



Ein erster Algorithmus (Pseudocode)

Setze dist[s] $\leftarrow 0$ und dist[v] $\leftarrow \infty$ für v $\neq$ s

Solange es eine Kante (u,v) gibt mit dist[u] + zeit(u,v) $<$ dist[v]

    setze dist[v] auf dist[u] + zeit(u,v)

- Dabei, zeit(u,v) = Fahrzeit über die Kante von u nach v
- u, v sind Namen für Knoten
- dist[v] = beste bekannte Fahrzeit von s nach v
- s = Startknoten

Fragen

- Finden wir so immer den schnellsten Weg vom Startknoten s zu allen anderen Knoten?

- Wie lange dauert das?

Korrektheit

- Immer gilt für alle Knoten v: dist[v] ist eine mögliche Fahrzeit von s nach v. Also

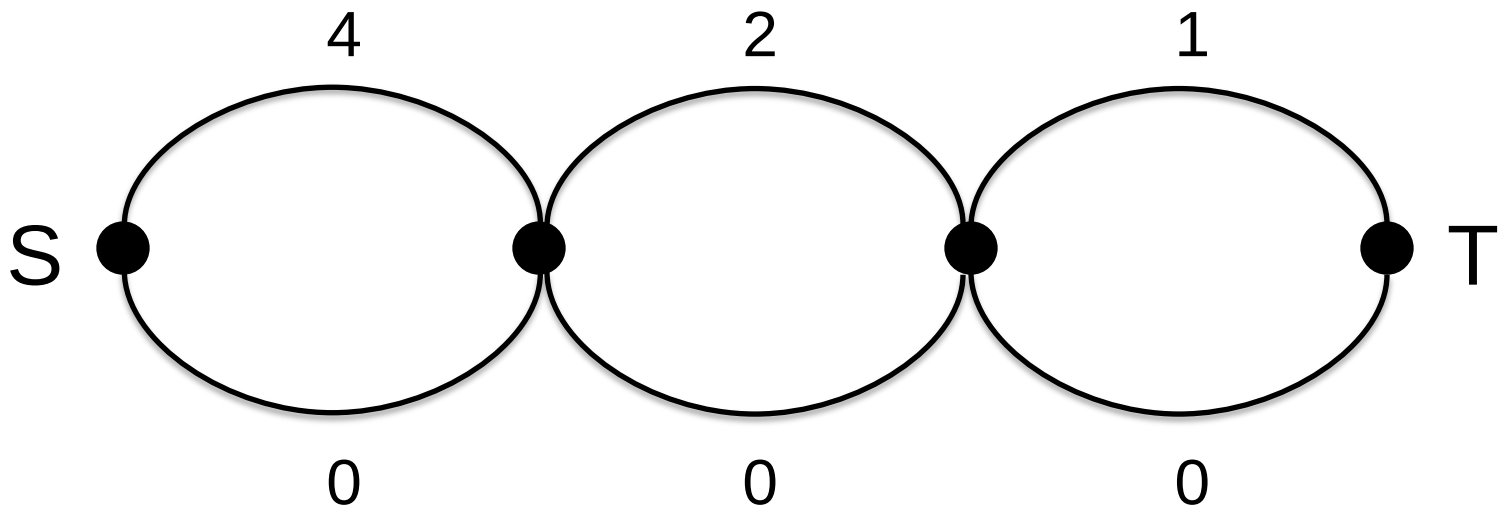
  dist[v] ≥ schnellste Fahrzeit von s nach v

- Beh.: wenn Algorithmus anhält, dann dist[v] = … für alle v

- Betrachte schnellsten Weg von s nach v:

  $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow v$

Effizienz



- Fahrzeit nach T wird 8 mal geändert
- Ein Ort mehr: Laufzeit verdoppelt sich

Exponentielles Wachstum ist ein Killer

- 4 Orte: 8 Änderungen
- 5 Orte: 16 Änderungen
- 6 Orte: 32
- 7 Orte: 64
- 21 Orte: mehr als 1.000.000
- 41 Orte: mehr als 1.000.000.000.000

Mein Rechner kann 10^9 Operationen/sec.

Geschicktes Auswählen

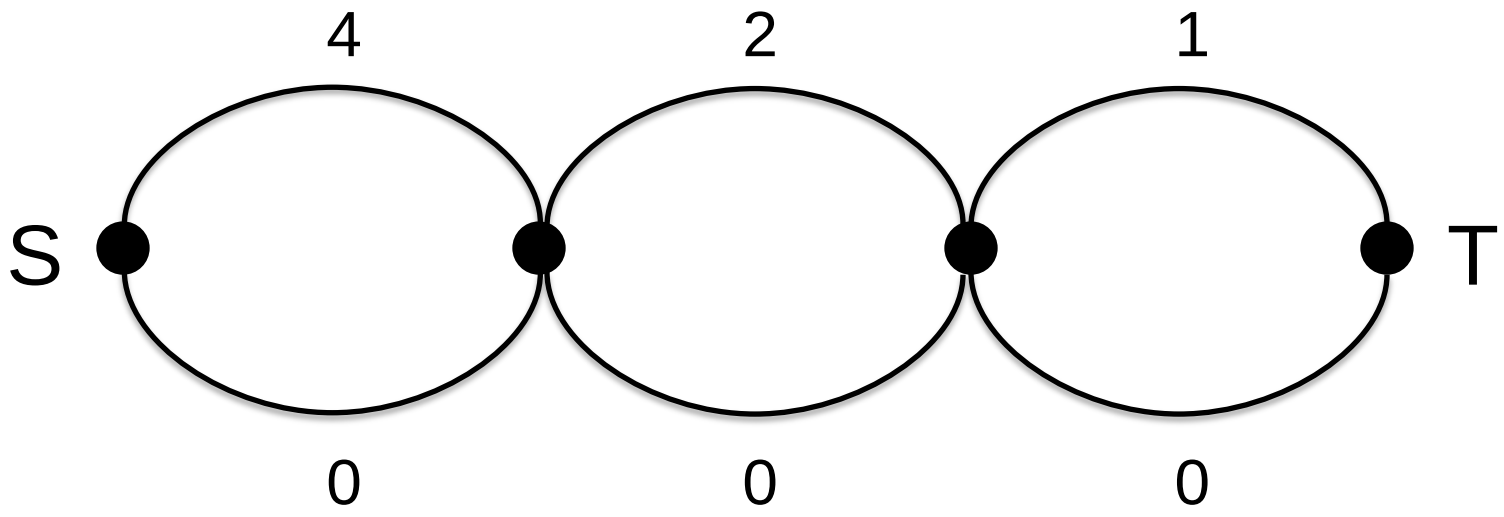
1. Nach s in 0 Min.
2. Wenn A in X Min. und A → B braucht Y Min., dann B in X+Y Min.
3. Wiederhole 2. solange nicht stabil

Wende 2) immer auf alle Kanten A → B aus dem Knoten A mit der kleinsten Fahrzeit an (auf den wir das nicht schon vorher angewendet haben)

Dijkstras Algorithmus *(1959)*

Turing Award *(1972)*

Beispiel



Fahrzeit wird über jede Kante

nur einmal propagiert

Pseudocode

Dijkstra(s): **dist[v] = beste bekannte Fahrzeit nach v**

```
dist[s] ← 0 und färbe s rot
für alle v ≠ s:
    dist[v] ← unendlich und färbe v rot
solange es einen roten Knoten gibt:
    u ← der rote Knoten mit kleinstem Wert dist[u]
    färbe u schwarz
    für alle Kanten (u,v) tue:
        falls dist[u] + Zeit(u,v) < dist[v]:
            dist[v] ← dist[u] + Zeit(u,v)
```

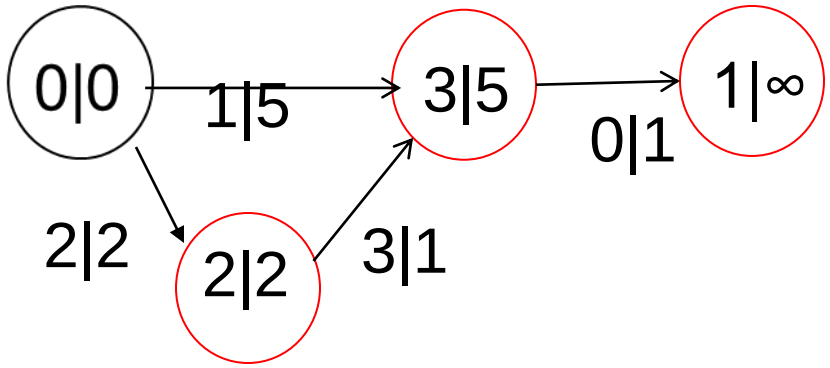
Vom Pseudocode zum Programm

- Der Pseudocode ist für Menschen verständlich, aber nicht für Computer.
- Wir geben Knoten Farben, wir suchen nach dem roten Knoten mit dem kleinsten dist-Wert, wir tun etwas für alle Kanten, die aus einem Knoten ausgehen.
- Wie sagen wir es einem Computer?

Graphen im Computer I

- Graph mit n Knoten und m Kanten: wir bezeichnen die Knoten mit den Zahlen 0 bis n – 1 und die Kanten mit 0 bis m – 1
- Attribute von Knoten und Kanten, etwa Farbe, dist, Fahrzeit, … Folge von n (m) Speicherzellen: i-te Zelle enthält die Information zum Knoten i (zur Kante i)

Graphen im Computer II



Knotennummer | Dist

Kantennummer | Fahrzeit

Knoten	0	1	2	3
Farbe				
Dist				
Erste Kante				
Letzte Kante + 1				

Kante	0	1	2	3
Länge				

Anmerkungen

- u ← der rote Knoten mit kleinstem Wert dist[u]

ist ausführlicher

```
mindist ← unendlich
Für i = 0 bis n – 1 tue
    falls (farbe[i] = rot und dist[i] < mindist)
    dann mindist ← dist[i]; u ← i;
```

- Pfade mitberechnen, Wellenausbreitung

Korrektheit

Ähnlich zum Grundalgorithmus, aber etwas komplexer.

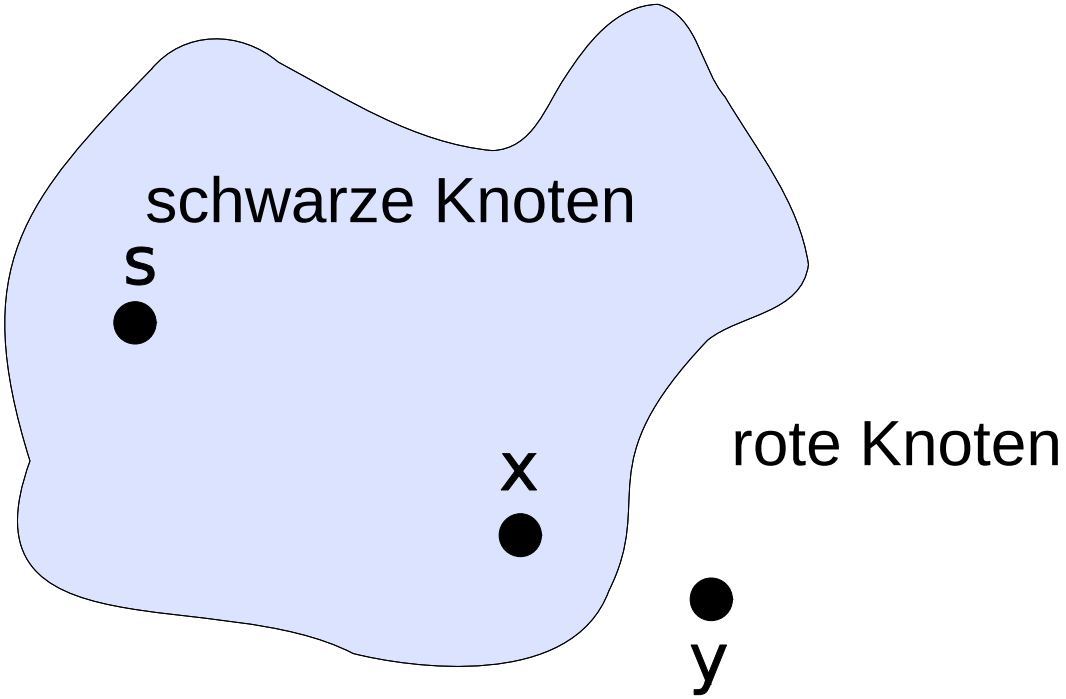
Siehe nächste Folie.

Wenn Sie eine mathematische Ader haben, sollten Sie versuchen, das Argument nachzuvollziehen, sonst überspringen Sie die Folie.

Wir zeigen: wenn wir einen Knoten y schwarz färben, gilt:

dist[y] = schnellste Fahrzeit nach y.

Korrektheit



Annahme: wenn wir y schwarz färben, ist dist[y] > schnellste Fahrzeit nach y

Für alle Knoten näher an s machen wir es richtig.

Für x gilt: Fahrzeit nach x < Fahrzeit nach y. Also ist dist[x] = Fahrzeit nach x, wenn wir x schwarz färben. Also wird x vor y schwarz gefärbt. Dann setzen wird dist[y] korrekt.

Laufzeit (wieviele Knoten und Kanten betrachten wir?)

Dijkstra(s):

n = #Knoten, m = #Kanten,

m_u = Kanten aus u heraus

dist[s] ← 0, färbe s rot

für alle v ≠ s:

    dist[v] ← unendlich, färbe v rot } ~n

solange es aktiven Knoten gibt:

~n { u ← der rote Knoten mit kleinstem Wert dist[u]
   { färbe u schwarz

~m_u { für alle Kanten (u,v) tue:
     {   falls dist[u] + Zeit(u,v) < dist[v]:
     {   dist[v] ← dist[u] + Zeit(u,v)

Laufzeit

- n mal Minimum finden: n mal n = n^2
- Alle Kanten verfolgen: m

Insgesamt: $m + n^2$

Kann verbessert werden auf $m + n \log n$

und braucht dann etwa 10 sec für Europa

Navigationssysteme

- Navigationssysteme im Auto benutzen Dijkstra + Straßenhierarchie.

- Auskunftssysteme (etwa Google Maps) berechnen Antworten zum Teil vor.

Nachschlagen statt Rechnen

- Idee: Alle Wege vorberechnen
  - Europa: $24 \cdot 10^6$ Knoten
  - 24 Millionen mal Dijkstra:

    24 mal 10^6 mal 10 Sekunden; das ist etwas unter 8 Jahren

- So einfach geht es nicht

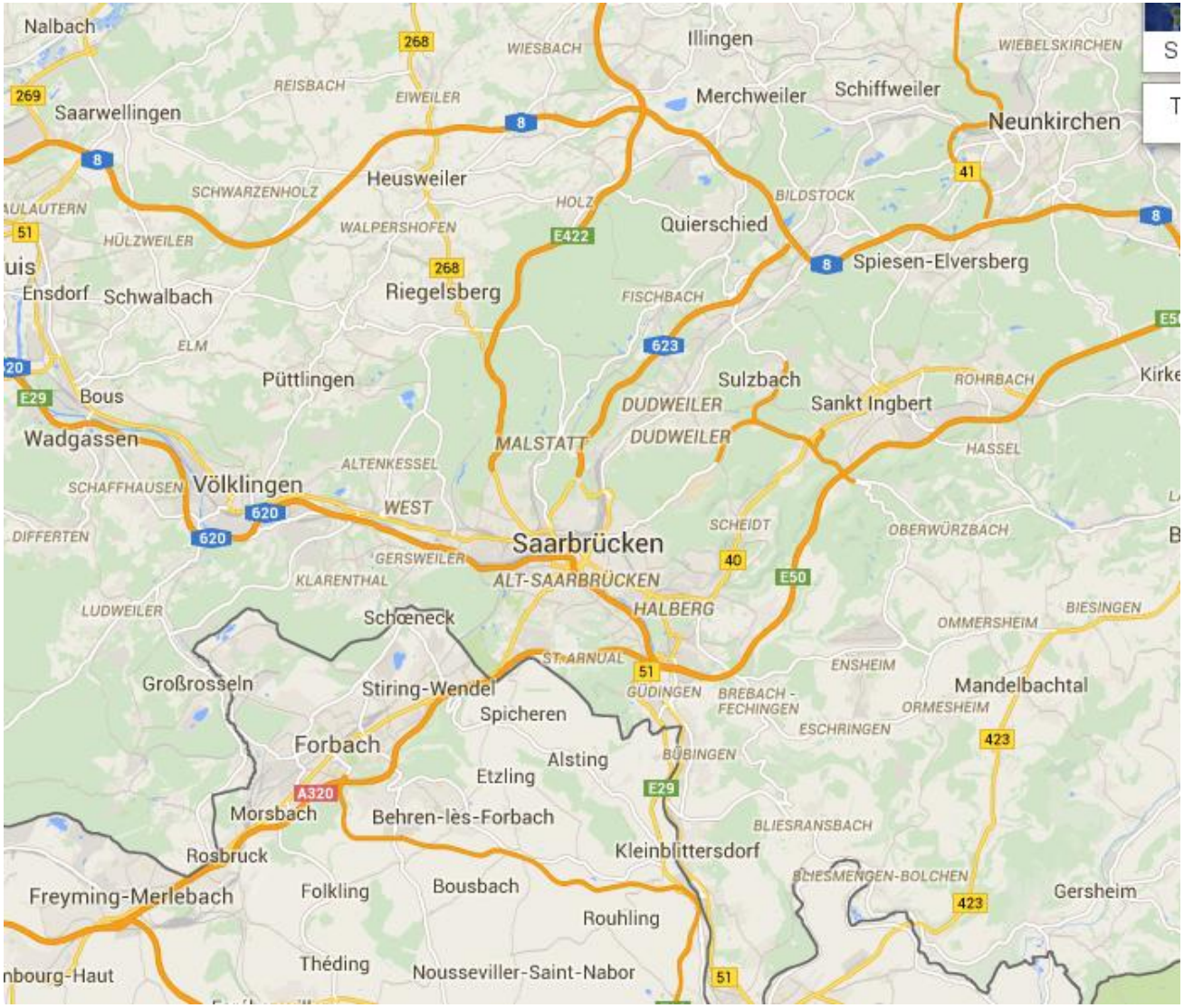
Transitknoten (Bast-Funke)

- Kurze Wege: on-the-fly mit Dijkstra
- Alle weiten Wege passieren eine kleine Menge von Transitknoten
  - Gesamtmenge der Transitknoten ist klein
  - Für jeden festen Startpunkt gibt es nur sehr wenige Transitknoten

Hannah Bast, Stefan Funke

Saar LB Preis

Transitknoten

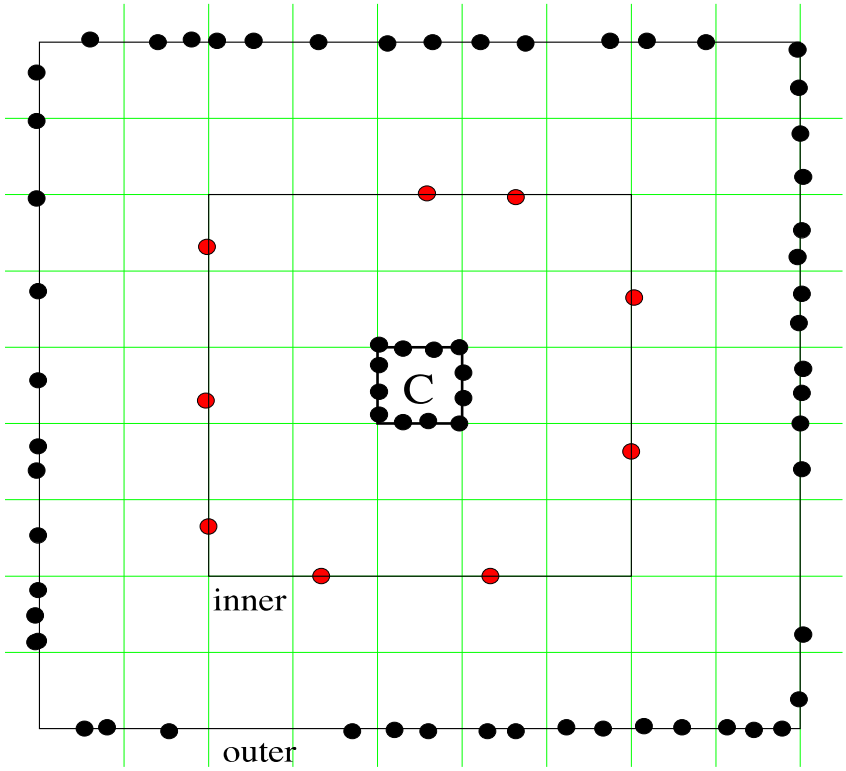


Transitknoten

- KM wohnt in Scheidt
- Meine Transitknoten
  - nach Osten: Autobahnauffahrt St. Ingbert
  - Nach Süden: Kleinblittersdorf
  - Nach Westen: goldene Bremm
  - Nach Nord-Westen: Stadtautobahn
  - Nach Norden und Nordosten: Autobahn Sulzbach
- Alle Bewohner von Scheidt benutzen die gleichen Transitknoten

Transitknoten

- Gitter über die Welt legen, Punkt = Kreuzung von Gitter und Straße
- Für jede Zelle C Wege nach „outer” ausrechnen
- Die Knoten aus „inner”, die benutzt werden sind Transitknoten für C



Vorberechnen

- Europa: 24 Mio. Knoten, 10 000 Transitknoten
- Für jeden Knoten zu seinen Transitknoten
  - Ungefähr 10/Knoten → $24 \cdot 10^7$ Wege
- Zwischen allen Transitknoten paarweise
  - Ungefähr 10 000 Knoten → 10^8 Wege
- Passt auf einen Server!

Wege finden

- Kurze Wege: Dijkstra
- Lange Wege: A nach B
  - Zerlegen in A – T_1 – T_2 – B wobei T_1 Transitknoten für A und T_2 für B
  - Probiere alle Möglichkeiten für T_1 und T_2 (jeweils etwa 10) und bestimme den minimalen Wert von

    $dist(A, T_1) + dist(T_1, T_2) + dist(T_2, B)$
  - Das sind 10 + 10 + 100 Speicherzugriffe

Zusammenfassung

- Dijkstra ist ein sehr schneller Algorithmus für kürzeste Wege (wenige Sekunden in Graph mit 10 Mio. Knoten und 30 Mio. Kanten).
- Straßengraphen haben Struktur (Hierarchie der Straßen, Fast-Planarität); Struktur vereinfacht das Problem.
- Vorberechnen ist eine gute Idee, wenn man viele Anfragen zu beantworten hat.