Universität
des
Saarlandes
FR 6.2 Informatik

Prof. Dr. Kurt Mehlhorn
Dr. Antonios Antoniadis
André Nusser

WiSe 2017/18

Übungen zu Ideen der Informatik

http://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/winter17/ideen/

Blatt 13 Abgabeschluss: Keine Abgabe

Aufgabe 1 (*0 Punkte*) Eine Clique in einem Graphen G ist eine Menge von Knoten, in der jeder mit jedem durch eine Kante verbunden ist. Eine unabhängige Knotemenge ist eine Menge von Knoten, zwischen denen es keine Kante gibt.

a) Gegeben ein Graph und eine Zahl k. Hat der Graph eine unabhängige Knotenmenge der Größe k? Argumentieren Sie das dieses Problem in NP ist. Was ist ein Lösungsvorschlag? Wie überprüfen sie ihn?

b) Gegeben ein Graph und eine Zahl k. Hat der Graph eine Clique der Größe k? Argumentieren Sie das dieses Problem in NP ist. Was ist ein Lösungsvorschlag? Wie überprüfen sie ihn?

c) Nehmen Sie an, dass Sie in Polynomzeit Cliquen der Größe k in Graphen finden können. Argumentieren Sie, dass Sie dann auch unabhängige Knotenmengen der Größe k in Graphen finden können. Hinweis: Sie müssen dazu den Graphen abändern.

d) Nehmen Sie an, dass Sie in Polynomzeit unabhängige Knotenmengen der Größe k in Graphen finden können. Argumentieren Sie, dass Sie dann auch Cliquen der Größe k in Graphen finden können. Hinweis: Sie müssen dazu den Graphen abändern.

Lösung:

a) Lösungsvorschlag ist eine Menge S von k Knoten. Überprüfung: Für jedes Paar von Knoten in S verifiziere ich, dass die Kante zwischen diesen Knoten vorhanden ist.

   Genauer: Ich laufe über alle Kanten und such die heraus, die beide Endpunkte in S haben. Falls ich annehmen darf, dass es zwischen zwei Knoten höchstens eine Kante gibt, dann überprüfe ich noch, dass die Anzahl der ausgesuchten Kanten gleich $k(k-1)/2$ ist.

   Falls es parallele Kanten geben darf, dann schreibe ich die Kanten als Paare (u, v), wobei der Knoten mit dem kleineren Namen zuerst geschrieben wird. Dann sortiere ich die Menge der ausgesuchten Kanten. Parallele Kanten stehen nun nebeneinander. Ich gehe über die sortierte Folge und streiche Duplikate.

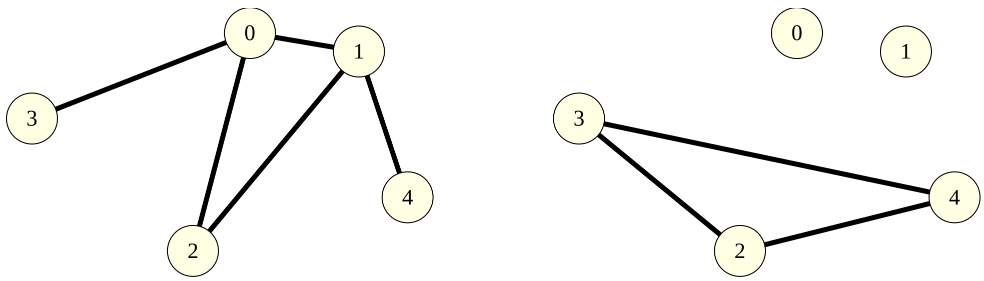


Abbildung 1: Ein Graph G und sein Komplement $\overline{G}$. Die Menge $\{0, 1, 2\}$ ist eine Clique in G und eine unabhängige Knotenmenge in $\overline{G}$. Die Menge $\{2, 3, 4\}$ ist eine unabhängige Knotenmenge in G und eine Clique in $\overline{G}$.

b) Lösungsvorschlag ist eine Menge S von k Knoten. Überprüfung: Für jedes Paar von Knoten in S verifiziere ich, dass es keine Kante zwischen diesen Knoten gibt.

   Genauer: Ich laufe über die Kanten. Falls ich auf eine Kante treffe, die beide Endpunkte in S hat, lehne ich den Lösungsvorschlag ab.

c) Sei $G = (V, E)$. Sei $\overline{G}$ der folgende Graph auf der gleichen Knotenmenge. In $\overline{G}$ gibt es eine Kante (u, v) genau wenn es diese Kante in G nicht gibt. Dann ist S eine unabhängige Knotenmenge in G genau wenn S eine Clique in $\overline{G}$ ist.

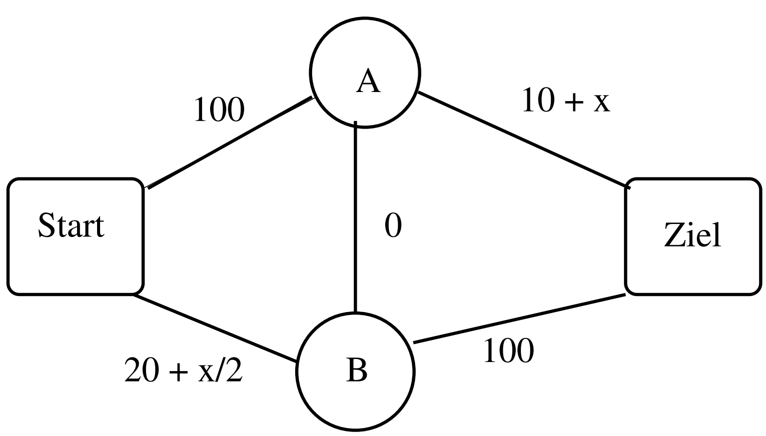
   Das ergibt folgenden Algorithmus:

   (a) Konstruiere $\overline{G}$.
   (b) Finde eine Clique S der Größe k in $\overline{G}$.
   (c) Gib S zurück.

d) Es gilt auch. S ist eine Clique in G genau wenn S ein unabhängige Knotenmenge in $\overline{G}$ ist. Das ergibt folgenden Algorithmus.

   (a) Konstruiere $\overline{G}$.
   (b) Finde eine unabhängige S der Größe k in $\overline{G}$.
   (c) Gib S zurück.

Aufgabe 2 (*0 Punkte*)



100 Autos wollen von Start nach Ziel fahren. Die Fahrzeiten sind wie angegeben. Auf der Straße von Start nach B ist die Fahrzeit 20 + x/2 Minuten, wenn sie von x Autos befahren wird. Nehmen Sie zuächst an, dass die Straße zwischen A und B NICHT existiert.

a) Was ist das globale Optimum? Wie viele Autos fahren oben rum und wieviele Fahren unten rum? Stellt sich dieses Optimum auch ein, wenn jeder einzelne Fahrer seine Fahrzeit optimiert?

b) Wir nehmen nun die Straße zwischen A und B hinzu. Was ist nun das globale Optimum? Welches Gleichgewicht stellt sich ein, wenn jeder Fahrer seine Fahrzeit optimiert? Nehmen sie dabei an, dass in jedem Schritt genau ein Fahrer seine Route wechselt.

Lösung:

a) Wir nehmen zunächst an, dass es keine Straße zwischen A und B gibt.

   Wenn n Fahrer oben rum fahren und $100 - n$ unten rum, dann ist die Gesamtfahrzeit

   $$n \cdot (100 + 10 + n) + (100 - n) \cdot (20 + (100 - n)/2 + 100) = 17000 + 3n^2/2 - 110n.$$

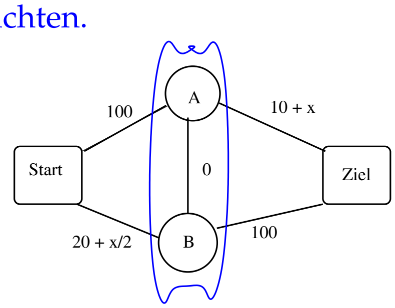
   Taking derivates shows that the minimum is attained for $n = 100/3$. Jetzt vergleichen wir noch 36 oben rum und 37 oben rum. 37 ist besser. Dann ist die Gesamtfahrzeit $37 \cdot 147 + 63 \cdot 151.5 = 14983.5$. Beachten Sie, dass die oben-Fahrer länger brauchen als die unten-Fahrer.

   Als Gleichgewicht stellt sich ein, dass die unten-Fahrer genauso lang brauchen wie die oben-Fahrer.

   Wenn n Personen oben fahren, ist ihre Fahrzeit $110 + n$. Die Fahrzeit der Fahrer, die unten fahren, ist $170 - n/2$. Gleichlange Fahrzeit haben wir für $n = 40$. Dann ist die Gesamtfahrzeit $100 \cdot 150 = 15000$.

b) Jetzt kommt die Verbindung zwischen A und B dazu. Fahrer, die B – Ziel benutzen, werden zu B – A – Ziel wechseln, solange weniger als 90 Autos die Straße A – Ziel benutzen. Fahrer die Start – A benutzen sind auf jeden Fall besser dran, wenn sie Start – B – A benutzen. Also fahren im Gleichgewicht 100 Autos von Start nach B. Dort fahren 90 weiter über A und 10 direkt nach Ziel. Die Gesamtfahrzeit ist $100 \cdot 170 = 17000$.

   Zur Berechnung des globalen Optimums machen wir folgende Beobachtung. Die Fahrzeit zwischen A und B beträgt 0 Minuten. Daher können wir die Knoten wie in Abbildung gezeigt verschmelzen und die linke Hälfte und die rechte Hälfte des Netzwerks getrennt betrachten.



Wenn x Autos unten herum von Start nach AB fahren dann ist die Gesamtfahrzeit $(20 + x/2)x + 100(100 - x) = 10000 - 80x + x^2/2$. Die Ableitung ist Null für $x = 80$. Also fahren 80 Autos über die Straße Start – B und 20 über die Straße Start – A. Die Gesamtfahrzeit für das linke Teilnetzwerk ist $60 \cdot 80 + 100 \cdot 20 = 6800$.

Nun zum rechten Teilnetzwerk. Wenn x Autos die Straße A – Ziel benutzen, dann ist die Gesamtfahrzeit $(10+x)x+100(100-x) = 10000-90x+x^2$. Die Ableitung ist Null für $x = 45$. Also fahren 45 Autos auf der Straße A – Ziel und 55 Autos auf der Straße B – Ziel. Die Gesamtfahrzeit für das rechte Teilnetzwerk ist $55 \cdot 45 + 100 \cdot 55 = 7975$.

Die Gesamtfahrzeit ist $6800 + 7975 = 14775$.

25 Autos benutzen die Straße von B nach A.

Aufgabe 3 (*0 Punkte*)
Zehn Jahre in der Zukunft: Sie besitzen eine kleine Firma welche sich auf den Verkauf von modernem elektronischem Bergsportequipment im deutschsprachigem Raum spezialisiert hat. Ihre Produktpalette ist vielfältig und reicht von GPS Uhren bis zur Go-Pro Action Kameras. Kunden erwerben Ihre Waren über eine von Ihnen betriebene Webseite. Ihr Geschäft läuft passabel, Sie vermuten aber, dass es besser laufen würde, wenn Sie einen grösseren Kundenkreis erreichen köennten. Insbesondere fällt Ihnen auf, dass die überwältigende Mehrheit Ihrer Kunden aus Österreich und Süd-Deutschland stammt, Sie aber kaum potentielle Kunden in der Schweiz erreichen. Sie haben etwas Geld zur Verfügung um gezielt Werbung zu schalten. Glücklicherweise haben Sie während Ihres Studiums in einschlägigen Vorlesungen gelernt, dass Frimen wie z.B.: facebook mit entsprechende Diensten unverschämt reich werden und Sie entschließen sich via facebook Werbung zu plazieren.
Entwerfen Sie dazu ein funktionierendes Werbekonzept basierend auf den Möeglichkeiten welche Ihnen als Unternehmer von facebook geboten wird. Recherchieren Sie selbige hier:

https://de-de.facebook.com/business/learn/facebook-ads-basics/

Stellen Sie sich Fragen wie: Wie sieht Ihre Werbestrategie aus? Was ist ihre Zielgruppe? Wie erreichen Sie einen grösseren Kundenkreis? Wie überprüfen Sie die Wirksamkeit Ihrer Werbung?

Auktionen, Gleichgewichte, Nutzenmaximierende Agenten war	spannend ☐	okay ☐	langweilig ☐
	schwierig ☐	okay ☐	einfach ☐