Ideen und Konzepte der Informatik
Optimierung

Antonios Antoniadis

(Folien von Kurt Mehlhorn)

27. Nov. 2017

Optimierungsprobleme

- Finde den schnellsten Weg von A nach B. Plane die Fahrten eines Logistikunternehmens.
- Gegeben sei eine Menge von Arbeitern und eine Menge von Aufgaben. Die Arbeiter brauchen unterschiedlich lang für die Bearbeitung der Arbeiten. Finde die Zuordnung der Aufgaben an die Arbeiter, die die Gesamtbearbeitungszeit minimiert (alternativ, möglichst frühe Fertigstellung).
- Steuere die Sägen in einem Sägewerk so, dass möglichst viele Produkte erzeugt werden.
- Steuere einen Marschflugkörper so, dass seine Gesamtflugstrecke nicht überschritten und die Wahrscheinlichkeit eines Abschusses minimiert wird.
- Packe Objekte in einen Container.

Optimierungsprobleme

- Optimiere den Fahrplan der Bundesbahn, der Saarbrücker Busse, ...
- Finde einen Stundenplan für die UdS.
- Finde einen Evakuirungsplan für ein Sportstadion.
- Berechne den billigsten Ernährungsplan (Diät).
- Berechne für eine Telefongesellschaft, wo Masten für den Mobilfunk aufgestellt werden sollen. Ziel ist eine möglichst große Überdeckung bei geringen Kosten.

Wie lösen wir solche Probleme?

1. Formulierung des Problems und Erstellen eines mathematischen Modells. Was möchten wir maximieren/minimieren? Gibt es Einschränkungen, was die Lösung angeht?
2. Lösen des Modellproblems.
3. Rückübersetzen der Lösung in die reale Welt und Hinterfragen der Lösung. Ist die Lösung nützlich in der realen Welt, oder weist sie eher auf eine Schwäche der Modellierung hin? Im zweiten Fall, Verbesserung des Modells.

Wie lösen wir solche Probleme?

1. Formulierung des Problems und Erstellen eines mathematischen Modells. Was möchten wir maximieren/minimieren? Gibt es Einschränkungen, was die Lösung angeht?
2. Lösen des Modellproblems.
3. Rückübersetzen der Lösung in die reale Welt und Hinterfragen der Lösung. Ist die Lösung nützlich in der realen Welt, oder weist sie eher auf eine Schwäche der Modellierung hin? Im zweiten Fall, Verbesserung des Modells.

Warnung: Ein Modell erfasst immer nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit. Auch beim sorgfältigen Erstellen des Modells kann es passieren, das dieser Ausschnitt wichtige Aspekte der Wirklichkeit weglässt. Daher ist der dritte Schritt wichtig! Die Lösung eines Optimierungsproblems weist oft auf Schwächen des Modells hin.

Warnendes Beispiel

- Modellannahme: Umsteigezeit mindestens fünf Minuten.
- Optimaler Fahrplan wird für viele Verbindungen die Minimalumsteigezeit planen.
- Bei Benutzung/Inspektion der Lösung stellt man fest, dass auch schon kleine Verspätungen die Lösung total durcheinander bringen.
- Konsequenz: Man sollte manche Umsteigezeiten erhöhen, oder sich überlegen, wie man die Robustheit eines Fahrplans gegenüber Verspätungen modellieren kann (stochastische Optimierung).

Ernärungsplan Optimieren

Wieviel kostet eine Ernährung, die alle Grundbedürfnisse erfüllt? – George J. Stigler: The cost of subsistence. Journal of Farm Economics, 27(2):303-314, 1945

- Es gab damals schon viele Bücher und Artikel zu ausgewogener und günstiger Ernährung.
- Der amerikanische Staat musste Hunderttausende von Soldaten ernähren.

Ernärungsplan Optimieren

Wieviel kostet eine Ernährung, die alle Grundbedürfnisse erfüllt?

– George J. Stigler: The cost of subsistence. Journal of Farm Economics, 27(2):303-314, 1945

- Es gab damals schon viele Bücher und Artikel zu ausgewogener und günstiger Ernährung.
- Der amerikanische Staat musste Hunderttausende von Soldaten ernähren.

George Joseph Stigler (1911–1991): US-amerikanischer Ökonom und Träger des Nobelpreises für Wirtschaftswissenschaften (1982). Ausgezeichnet wurde er für seine Arbeit zu Industrial Organization, dem Funktionieren von Märkten und Ursachen und Folgen von Marktregulierung.

1. Schritt: Modellierung für Ernährung

1. Antwort: Eine Ernährung, die die Empfehlungen des National Research Councils bezüglich 9 wesentlicher Nährstoffe erfüllt.

Nahrstoff	Täglicher Bedarf
Kalorien	3000 Kalorien
Protein	70gr
Kalzium	0.8gr
Eisen	12mgr
Vitamin A	5000 IU
Vitamin B1	1.8mgr
Vitamin B2	2.7mgr
Niazin	18mgr
Vitamin C	75mgr

1. Schritt: Modellierung für Ernährung

1. Antwort: Eine Ernährung, die die Empfehlungen des National Research Councils bezüglich 9 wesentlicher Nährstoffe erfüllt.

Nahrstoff	Täglicher Bedarf
Kalorien	3000 Kalorien
Protein	70gr
Kalzium	0.8gr
Eisen	12mgr
Vitamin A	5000 IU
Vitamin B1	1.8mgr
Vitamin B2	2.7mgr
Niazin	18mgr
Vitamin C	75mgr

Stigler weist darauf hin, dass diese Empfehlungen wahrscheinlich unvollständig und ungenau sind.
Heute: niedrigere Kalorienzahl und obere Schranke für Fett im Speiseplan.

Preise der Nahrungsmittel?

- Stigler betrachtet die 77 Nahrungsmittel, für die das „Bureau of Labor Statistics“ regelmäßig Preise ermittelt.
- Für jedes Nahrungsmittel entnimmt er der Literatur den Gehalt der verschiedenen Nährstoffe.
- Er weist darauf hin, dass diese Zahlen mit Vorsicht zu genießen seien (Zubereitung und Lagerungszeit können die Nährstoffe zerstören und nicht jeder Apfel ist gleich).

Preise der Nahrungsmittel?

- Stigler betrachtet die 77 Nahrungsmittel, für die das „Bureau of Labor Statistics“ regelmäßig Preise ermittelt.
- Für jedes Nahrungsmittel entnimmt er der Literatur den Gehalt der verschiedenen Nährstoffe.
- Er weist darauf hin, dass diese Zahlen mit Vorsicht zu genießen seien (Zubereitung und Lagerungszeit können die Nährstoffe zerstören und nicht jeder Apfel ist gleich).

Formalisierung der Aufgabe: Wie viel soll man von jedem Nahrungsmittel kaufen, damit die Anforderungen an den Speiseplan erfüllt sind und die Kosten minimal sind?

Modell

- $x_i :=$ Die Menge (in kg) des i-ten Nahrungsmittels (NM) im optimalen Speiseplan, i=1,2,...77
- 9 Bedingungen (eine je Inhaltsstoff): Plan muss Inhaltsstoffe in hinreichender Menge zur Verfügung stellen, etwa für Kalorien:

$$\text{Kalorien/kg von NM1} \cdot x_1 + \cdots + \text{Kalorien/kg von NM77} \cdot x_{77} \geq 3000.$$

- Kosten:

$$\text{Preis/kg von NM1} \cdot x_1 + \cdots + \text{Preis/kg von NM77} \cdot x_{77}.$$

Modell

- $x_i :=$ Die Menge (in kg) des i-ten Nahrungsmittels (NM) im optimalen Speiseplan, i=1,2,... 77
- 9 Bedingungen (eine je Inhaltsstoff): Plan muss Inhaltsstoffe in hinreichender Menge zur Verfügung stellen, etwa für Kalorien:

  $$\text{Kalorien/kg von NM1} \cdot x_1 + \cdots + \text{Kalorien/kg von NM77} \cdot x_{77} \geq 3000.$$

- Kosten:

  $$\text{Preis/kg von NM1} \cdot x_1 + \cdots + \text{Preis/kg von NM77} \cdot x_{77}.$$

Aufgabe: Finde nichtnegative Werte für die Unbekannten x_1 bis x_{77} die alle Nebenbedingungen erfüllen und die Kosten minimieren.

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren$\Rightarrow$ Reduktion auf 15NM.

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren $\Rightarrow$ Reduktion auf 15NM.

Mehl dominiert Brot, Rinderleber alle Fleischarten, alle patentierten Cerealien und Getränke werden dominiert.

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren$\Rightarrow$ Reduktion auf 15NM.

Mehl dominiert Brot, Rinderleber alle Fleischarten, alle patentierten Cerealien und Getränke werden dominiert.

„Künstliche Nahrungsmittel“, etwa 5 Kilo Mehl plus 2 Kilo Kraut: Wenn ein künstliches NM ein echtes NM dominiert, kann man das Echte streichen

Schritt 1: Vereinfachung

Damals gab es keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungssystemen. Stigler bestimmte eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren$\Rightarrow$ Reduktion auf 15NM.

Mehl dominiert Brot, Rinderleber alle Fleischarten, alle patentierten Cerealien und Getränke werden dominiert.

„Künstliche Nahrungsmittel“, etwa 5 Kilo Mehl plus 2 Kilo Kraut: Wenn ein künstliches NM ein echtes NM dominiert, kann man das Echte streichen$\Rightarrow$ Reduktion auf 9NM.

Lösung

- Ziel: Erfüllen von 9 Ungleichungen mit insgesamt 9 Variablen (oBdA, x_1 bis x_9), die minimale Kosten bewirken. Optimale Lösung muss einige Ungleichungen mit Gleichheit erfüllen...
- Es gibt $2^9 - 1 = 511$ nichtleere Teilmengen der Ungleichungen. Stigler betrachtet nur einige Teilmengen (Intuition).
- Für feste Teilmenge S löst er das entstehende Gleichungssystem. Dann wird aber seine Beschreibung vage.
- Er kommt auf Lösung mit jährlichen Kosten von \$39.93 (etwa \$510 in heutigem Geld).

Ergebnis

Nahrungsmittel	Jährlich	Kosten in $
Weizenmehl	370lb.	13.33
Kondensmilch	57 Dosen	3.84
Kohl	111lb.	4.11
Spinat	23lb.	1.85
Weiße Bohnen	285lb.	16.80
Summe:		39.93

Ergebnis

Nahrungsmittel	Jährlich	Kosten in $
Weizenmehl	370lb.	13.33
Kondensmilch	57 Dosen	3.84
Kohl	111lb.	4.11
Spinat	23lb.	1.85
Weiße Bohnen	285lb.	16.80
Summe:		39.93

Ist das aber optimal?

Stigler argumentiert (aber nicht ganz sauber) eine untere Schranke: Mehl ist die billigste Kalorienquelle: Mehl für $24.50 hat 3000 Kalorien, aber kaum Kalzium. Die billigste Quelle für Kalzium sei Käse. Dann noch mal $14.90 dazu.

Dantzig erfindet Lösungsalgorithmus (Simplexalgorithmus) in 1947. Ein Team von 9 menschlichen Rechnern berechnet in 120 Personentagen die optimale Lösung: Der billigste Speiseplan kostet $39.69.

- Dantzig erfindet Algorithmus zum Lösen eines Systems von Ungleichungen in 1947.
- Modellierung:
  - Versuch, das Problem mathematisch zu fassen. Sehr interessant, **aber:**
  - die Modellierung ist inadäquat. Wer will schon so essen?
  - Kann man Abwechslung modellieren?

Algorithmen für lineare Optimierung

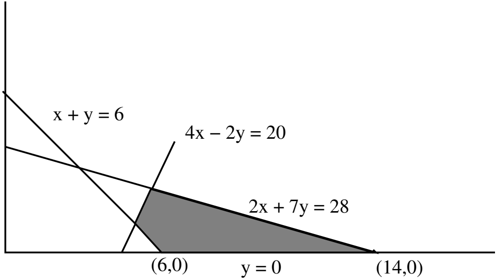
Lineare Optimierung: Maximierung/Minimierung einer linearen Funktion mit n reellen Variablen unter Nebenbedingungen (Gleichungen und Ungleichungen).
Beispiel: Probleme aus den ersten Folien.

- Fourier-Motzkin: einfach aber ineffizient. Joseph Fourier (1768-1830), Theodore Motzkin (1908-1970).
- Simplex Algorithmus (George Dantzig, 1947): immer noch der am meisten benutzte Algorithmus; oft sehr schnell, aber im schlechtesten Fall exponentielle Laufzeit.
- Ellipsoidmethode (L. Khachiyan) und Innere Punkt Methode (N. Karmakar). Polynomielle Laufzeit. Die Innere Punkt Methode wird oft verwendet.
- Systeme: CPLEX, Gurobi, SoPlex,...

Simplexalgorithmus

maximiere y wobei

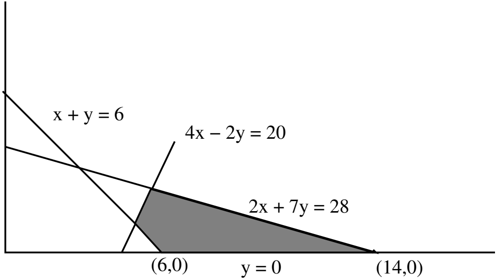
$$\begin{aligned} 2x + 7y &\leq 28 \\ 4x - 2y &\geq 20 \\ x + y &\geq 6 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



Simplexalgorithmus

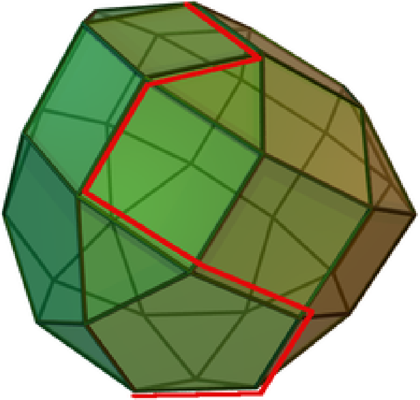
maximiere y wobei

$$\begin{aligned} 2x + 7y &\leq 28 \\ 4x - 2y &\geq 20 \\ x + y &\geq 6 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$



- Ungleichungen definieren ein Polygon P (grauer Bereich). Wir suchen die Ecke mit maximaler y-Koordinate. Der Schnittpunkt der Geraden $2x + 7y = 28$ und $4x - 2y = 20$ hat die Koordinaten $(\frac{49}{8}, \frac{9}{4})$. Damit optimaler Wert $y^* = \frac{9}{4}$.
- **Idee:** finde Ecke p von P und betrachte die inzidenten Kanten von P. Falls keine zu einem höheren Wert der Zielfunktion führt, ist die Ecke optimal. Falls eine Kante zu einem besseren Wert führt, laufe zum anderen Ende der Kante und wiederhole.

Simplex in 3D (Wikipedia Bild)



z-Koordinate maximieren.

Fourier-Motzkin Verfahren

Das Fourier-Motzkin Verfahren entscheidet, ob ein System von Ungleichungen lösbar ist.

Fourier-Motzkin Verfahren

Das Fourier-Motzkin Verfahren entscheidet, ob ein System von Ungleichungen lösbar ist.

- löse alle Ungleichungen nach x_n auf
- es gibt drei Arten von Ungleichungen: (i) $x_n \leq \dots$, (ii) $x_n \geq \dots$, und (iii) enthalten kein x_n.
- konstruiere ein neues System durch Elimination von x_n: (iii) werden unverändert übernommen, aus jedem Paar $x_n \leq A$ und $x_n \geq B$ von (i) und (ii), konstruiere $B \leq A$.
- iteriere bis alle Variablen eliminiert sind. Dann hat man eine Menge von Ungleichungen zwischen Zahlen. Trivial zu entscheiden. (Lösung existiert genau dann wenn alle Ungleichungen gelten).
- Erweiterung auf Optimierung: Binärsuche.

Fourier-Motzkin Beispiel

$$
\begin{aligned}
&\text{maximiere } y \text{ wobei} \\
&\qquad 2x + 7y \leq 28 \\
&\qquad 4x - 2y \geq 20 \\
&\qquad x + y \geq 6 \\
&\qquad y \geq 0
\end{aligned}
$$

hat Lösung $\frac{9}{4}$. Wir benutzen Fourier-Motzkin, um zu entscheiden, ob es eine Lösung mit Wert ≥ 3 gibt.

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{ Wassergehalt von } 1kg \text{ NM1})x_1 + \ldots$$

- Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag! In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

$$\text{Nichtwassermenge } = (1 - \text{ Wassergehalt von } 1kg \text{ NM1})x_1 + \dots$$

- Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag! In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.
- Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)
Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{Wassergehalt von } 1kg \text{ NM1})x_1 + \dots$$

- Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag! In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.
- Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.
- Lösung 3: 2 Pfund Kleie/Tag. Seine Frau verbot es ihm $\rightarrow$ Obere Schranke für Kleie.

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{ Wassergehalt von } 1kg \text{ NM1})x_1 + \ldots$$

- Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag! In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.
- Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.
- Lösung 3: 2 Pfund Kleie/Tag. Seine Frau verbot es ihm $\rightarrow$ Obere Schranke für Kleie.
- Lösung 4: 2 Pfund Melasse

Gefahren

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem, Interfaces, 20(4):43-47,1990)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Wollte das Sättigungsgefühl maximieren.

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{ Wassergehalt von } 1kg \text{ NM1})x_1 + \ldots$$

- Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag! In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und **kein** Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.
- Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 3 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.
- Lösung 3: 2 Pfund Kleie/Tag. Seine Frau verbot es ihm $\rightarrow$ Obere Schranke für Kleie.
- Lösung 4: 2 Pfund Melasse
- Lösung 5: Seine Frau übernahm das Regime! Dantzig nahm 22 Pfund (amerikanische Pfund) ab.

Abwechslung Modellieren

Nehmen wir Gerichte als Bestandteile des Speiseplans an.
$x_i :=$ Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i essen.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, ... Abwechslung
- Alles andere wie bisher

Abwechslung Modellieren

Nehmen wir Gerichte als Bestandteile des Speiseplans an.
$x_i :=$ Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i essen.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + x_2 + \dots x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, … Abwechslung
- Alles andere wie bisher
- **Was bedeutet 3,37 mal Spaghetti???**

Abwechslung Modellieren

Nehmen wir Gerichte als Bestandteile des Speiseplans an.
$x_i :=$ Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i essen.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, ... Abwechslung
- Alles andere wie bisher
- **Was bedeutet 3,37 mal Spaghetti???**
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung. Aber ganzzahlige Optimierung viel schwerer!

Abwechslung Modellieren

Nehmen wir Gerichte als Bestandteile des Speiseplans an.
$x_i :=$ Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i essen.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + x_2 + \ldots x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \geq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} x_i \geq 52$, …Abwechslung
- Alles andere wie bisher
- **Was bedeutet 3,37 mal Spaghetti???**
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung. Aber ganzzahlige Optimierung viel schwerer!
- Lösung 2: Runde Zahlen in der Lösung auf/ab zur nächsten ganzen Zahl.

Zusammenfassung

- Lineare Optimierung: Maximieren/Minimieren einer linearen Funktion in *n* Variablen unter Nebenbedingungen ((Un)Gleichungen). Sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Optimierung ist noch ausdrucksstärker, aber viel schwieriger.

Zusammenfassung

- Lineare Optimierung: Maximieren/Minimieren einer linearen Funktion in n Variablen unter Nebenbedingungen ((Un)Gleichungen). Sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Optimierung ist noch ausdrucksstärker, aber viel schwieriger.

- Ergebnis nie besser als das Modell und die Daten. Das gilt auch für Simulation, z.B. Klimasimulation, Stresstest bei Banken, usw.