Ideen der Informatik
Optimierung

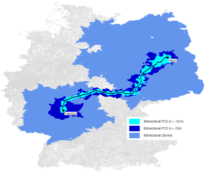
Kurt Mehlhorn

max planck institut
informatik

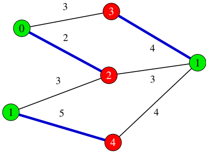
SIC Saarland
Informatics Campus

Dezember 2018

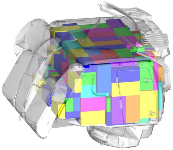
Optimierungsprobleme sind allgegenwärtig:



- Finde den schnellsten Weg von *A* nach *B*. Plane die Fahrten eines Unternehmens.
- Ordne eine Menge von Aufgaben einer Menge von Arbeitern so zu, dass der Gewinn maximiert wird.



- Steuere den Ablauf in einer Autofabrik.
- Steuere einen Marschflugkörper so, dass seine Gesamtflugstrecke nicht überschritten und die Wahrscheinlichkeit eines Abschusses minimiert wird.
- Packe Objekte in einen Container.



Weitere Optimierungsprobleme

- Optimiere den Fahrplan der Bundesbahn, der Saarbrücker Busse, ...
- Finde einen guten Stundenplan für die UdS.
- Finde den Evakuierungsplan für ein Sportstadion.
- Berechne den billigsten Ernährungsplan (Diät).
- Berechne für eine Telefongesellschaft, wo Masten für den Mobilfunk aufgestellt werden sollen. Ziel ist eine möglichst große Überdeckung bei geringen Kosten.

Vorgehensweise

- Formulierung des Problems und Erstellen eines mathematischen Modells.
- Lösen des Modellproblems.
- Rückübersetzen der Lösung in die reale Welt und Hinterfragen der Lösung. Ist die Lösung nützlich in der realen Welt oder weist sie eher auf eine Schwäche der Modellierung hin? Im zweiten Fall, Verbesserung des Modells.

Warnung: Ein Modell erfasst immer nur einen Ausschnitt der Wirklichkeit. Auch beim sorgfältigen Erstellen eines Modells kann es passieren, dass man wesentliche Aspekte der Wirklichkeit weglässt. Daher ist der dritte Schritt wesentlich. Die Lösung eines Optimierungsproblems weist oft auf Schwächen des Modells hin.

Ein warnendes Beispiel (weitere kommen später)

- Modellannahme für Fahrplan der Bundesbahn: Umsteigezeit mindestens fünf Minuten.
- Ein optimaler Fahrplan wird für viele Verbindungen nur die Minimalumsteigezeit planen.
- Bei Benutzung/Inspektion der Lösung stellt man fest, dass auch schon kleinste Verspätungen die Lösung total durcheinander bringen.
- Als Konsequenz wird man manche Umsteigezeiten erhöhen oder sich überlegen, wie man die Robustheit eines Fahrplans gegenüber Störungen modellieren kann (stochastische Optimierung).

Optimale Ernährungspläne

George Stigler formulierte 1945 folgende Optimierungsaufgabe:
Wieviel kostet eine Ernährung, die alle Grundbedürfnisse erfüllt?

George J. Stigler: The cost of subsistence. *Journal of Farm Economics*, 27(2):303–314, 1945.

Er meinte die Aufgabe halb-spaßig, halb-ernst. Halb-spaßig, weil es auch damals schon viele Bücher und Artikel zu ausgewogener und günstiger Ernährung gab, halb-ernst, weil der amerikanische Staat Hunderttausende von Soldaten zu ernähren hatte.

George Joseph Stigler (1911 – 1991) war ein US-amerikanischer Ökonom. Im Jahr 1982 erhielt er den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften. Ausgezeichnet wurde er für seine Arbeit zu Industrial Organization, dem Funktionieren von Märkten und Ursachen und Folgen von Marktregulierung.

Modellierung: Was ist eine hinreichende Ernährung?

Erste Antwort: Eine Ernährung, die die Empfehlungen des National Research Councils bezüglich 9 wesentlicher Nährstoffe erfüllt.

Nutrient	Daily Recommended Intake
Calories	3,000 Calories
Protein	70 grams
Calcium	.8 grams
Iron	12 milligrams
Vitamin A	5,000 IU
Thiamine (Vitamin B1)	1.8 milligrams
Riboflavin (Vitamin B2)	2.7 milligrams
Niacin	18 milligrams
Ascorbic Acid (Vitamin C)	75 milligrams

Er weist darauf hin, dass diese Empfehlungen wahrscheinlich unvollständig und ungenau sind.
Heute: auch obere Schranke für Fett im Speiseplan, niedrigere Kalorienzahl

Nahrungsmittel

Stigler betrachtet die 77 Nahrungsmittel, für die das Bureau of Labor Statistics regelmäßig die Preise ermittelt.

Für jedes Nahrungsmittel entnimmt er der Literatur den Gehalt der verschiedenen Nährstoffe.

Er weist ausdrücklich darauf hin, dass diese Zahlen mit Vorsicht zu genießen seien,
da gewisse Arten der Zubereitung oder lange Lagerung gewisse Nährstoffe zerstörten und
da die Tabelle nur Mittelwerte enthalte. So enthält etwa ein Apfel der Sorte Ontario 10x so viel Vitamin C wie ein Apfel der Sorte McIntosh.

Formalisierung der Aufgabe: Wieviel soll man von jedem Nahrungsmittel kaufen, damit die Anforderungen an den Speiseplan erfüllt sind und die Kosten minimal sind?

Mathematisches Modell

$x_i =$ Menge (in kg) des i-ten Nahrungsmittels (NM) im optimalen Speiseplan, $i = 1..77$

9 Bedingungen (je eine pro Inhaltsstoff): Plan muss Inhaltsstoffe in hinreichender Menge zur Verfügung stellen, etwa für Kalorien:

$$\text{Kalorien/kg von NM } 1 \cdot x_1 + \ldots + \text{Kalorien/kg von NM } 77 \cdot x_{77} \geq 3000.$$

Die Kosten des Ernährungsplans sind dann

$$\text{Kosten} = \text{Preis/kg von NM } 1 \cdot x_1 + \ldots + \text{Preis/kg von NM } 77 \cdot x_{77}.$$

Aufgabe: finde nichtnegative Werte für die Unbekannten x_1 bis x_{77}, die alle Nebenbedingungen erfüllen und die Kosten minimieren.

Lösung der Aufgabe: Schritt 1, Vereinfachung

Stigler kannte keinen Algorithmus zur Lösung von Ungleichungs-systemen. Er bestimmte auf sehr clevere Weise eine Näherungslösung.

Dominanz: Wenn A billiger ist als B, aber von jedem Inhaltsstoff mindestens so viel enthält wie B, dann kann man B streichen, ohne eine optimale Lösung zu verlieren. Reduktion auf 15 NM.

Mehl dominiert Brot, Rinderleber dominiert alle anderen Fleischarten, alle patentierten Cereals und Getränke werden dominiert.

"künstliche Nahrungsmittel", etwa 5 Kilo Mehl plus 2 Kilo Kraut: Wenn ein künstliches NM ein echtes NM dominiert, kann man das echte streichen. Reduktion auf 9 NM.

Schritt 2: Lösung

Nun 9 zu erfüllende Ungleichungen in 9 Variablen (oBdA, x_1 bis x_9). Wollen Lösung minimaler Kosten. Optimale Lösung muss einige der Ungleichungen mit Gleichheit erfüllen, da ...

Es gibt $2^9 - 1 = 511$ nichtleere Teilmengen der Ungleichungen. Stiglitz betrachtet nur einige Teilmengen (Intuition).

Für feste Teilmenge S löst er das entstehende Gleichungssystem und nun wird seine Beschreibung vage.

Er kommt dann auf eine Lösung mit jährlichen Kosten von 39.93 Dollar (etwa 510 Dollar mit heutigem Geld).

Ergebnis

Er kommt dann auf eine Lösung mit jährlichen Kosten von 39.93 Dollar (etwa 510 Dollar mit heutigem Geld).

Food	Annual Quantities	Annual Cost (in Dollars)
Wheat Flour	370 lb.	13.33
Evaporated Milk	57 cans	3.84
Cabbage	111 lb.	4.11
Spinach	23 lb.	1.85
Dried Navy Beans	285 lb.	16.80
Total Annual Cost		39.93

Ist das optimal? Stigler argumentiert (nicht ganz sauber) eine untere Schranke: Mehl ist die billigste Kalorienquelle: Mehl für $24.50 hat 3000 Kalorien. Aber kaum Kalzium. Die billigste Quelle für Kalzium ist Käse. Dann noch mal $14.90 dazu.

Dantzig erfindet Lösungsalgorithmus (Simplexalgorithmus) in 47. Ein Team von 9 menschlichen Rechnern berechnet in 120 Manntagen die optimale Lösung: Der billigste Speiseplan kostet 39.69 Dollar. Stigler's Lösung lag nur 24 Cent darüber.

Was wissen wir jetzt?

- algorithmisch: optimale Lösung eines Systems von Ungleichungen zu finden ist nicht einfach. Dantzig erfindet Lösungsalgorithmus in 1947. Siehe unten.
- Modellierung:
  - der Versuch, das Problem mathematisch zu fassen, ist interessant, aber
  - die Modellierung ist inadäquat: niemand will so essen.

    Kann man Abwechslung modellieren?

    Darauf kommen wir am Ende der Vorlesung zurück.

Algorithmen für lineare Optimierung

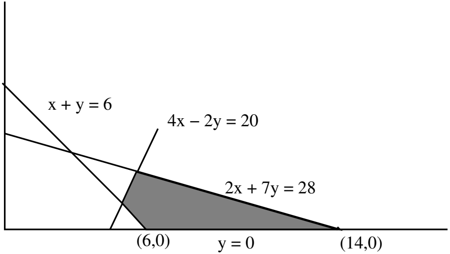
Lineare Optimierung = Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in n reellen Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen).

Beispiel: Speiseplanerstellung und viele, viele andere Probleme.

- Fourier-Motzkin: einfach aber ineffizient. Joseph Fourier (1768 – 1830), Theodore Motzkin (1908 – 1970), Arbeit in 1936
- Simplex Algorithmus (Georg Dantzig, 1947): immer noch der am meisten benutzte Algorithmus; oft sehr schnell, aber im schlechtesten Fall exponentiell.
- Leonid Khachiyan, Ellipsoidmethode, und N. Karmakar, Innere Punkt Methode, entwickelten Algorithmen mit polynomieller Laufzeit. Die Innere Punkt Methode wird oft verwendet.
- Systeme: CPLEX, Gurobi, SoPlex, ...

Der Simplexalgorithmus

$$\text{maximiere} \quad y \quad \text{wobei}$$
$$2x + 7y \leq 28$$
$$4x - 2y \geq 20$$
$$x + y \geq 6$$
$$y \geq 0$$

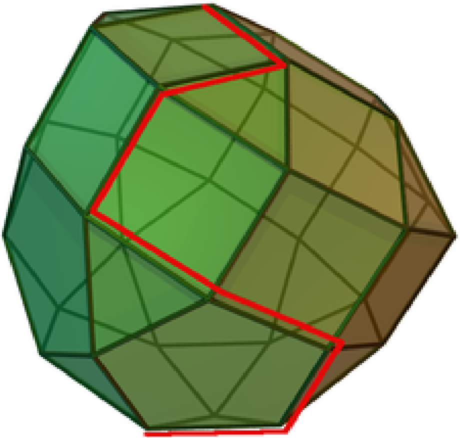


Ungleichungen definieren ein Polygon P (grauer Bereich). Wir suchen die Ecke mit maximaler y-Koordinate. Der Schnittpunkt der Geraden $2x + 7y = 28$ und $4x - 2y = 20$ hat die Koordinaten $(\frac{49}{8}, \frac{9}{4})$. Damit optimaler Wert $y^* = \frac{9}{4}$.

Idee des Algorithmus: finde eine Ecke p von P und betrachte die inzidenten Kanten von P. Falls keine zu einem höheren Wert der Zielfunktion führt, ist die Ecke optimal. Falls eine Kante zu einem besseren Wert führt, laufe zu dem anderen Ende der Kante und wiederhole.

3 Dim auf nächster Folie

Simplex in 3D (Bild aus Wikipedia)



Maximierung der z-Koordinate

Fourier – Motzkin zur Entscheidung der Lösbarkeit

- Fourier–Motzkin entscheidet, ob ein System von Ungleichungen lösbar ist.
- Löse alle Ungleichungen nach einer der Variablen auf, etwa nach Variable x.
- Es gibt drei Arten von Ungleichungen: (1) $x \leq \ldots$, (2) $x \geq \ldots$, und (3) erwähnen x nicht.
- Konstruiere neues System durch Elimination von x: übernimm (3) unverändert. Aus jedem Paar $x \leq A$ und $x \geq B$ von (1) und (2) konstruiere $B \leq A$.
- Iteriere bis alle Variablen eliminiert sind. Dann hat man eine Menge von Ungleichungen zwischen Zahlen. Trivial zu entscheiden.
- Illustriere am Beispiel: siehe nächste Folie
- Erweiterung auf Optimierung: Binärsuche

Fourier – Motzkin Beispiel

$$\text{maximiere } y \text{ wobei } \quad \begin{aligned} 2x + 7y &\leq 28 \\ 4x - 2y &\geq 20 \\ x + y &\geq 6 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

hat Lösung $\frac{9}{4}$. Wir benutzen Fourier-Motzkin um zu entscheiden, ob es eine Lösung mit Wert ≥ 3 gibt.

Die Gefahren schlechter Modellierung und/oder Daten

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem. *Interfaces*, 20(4):43–47, 1990.)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Hatte Angst vor Hungergefühl und wollte daher das Sättigungsgefühl maximieren. Er wählte die Zielfunktion

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{Wassergehalt von 1kg NM1})x_1 + \dots$$

Wieso diese Zielfunktion? Er überlegte sich, dass Wasser zwar den Magen füllt, aber nicht satt macht. Deswegen wollte er möglichst viel zu sich nehmen, was kein Wasser ist.

Die Gefahren schlechter Modellierung und/oder Daten

Das Ergebnis einer Optimierung kann nie besser sein als das Modell und die Daten. (George B. Dantzig, The diet problem. *Interfaces*, 20(4):43–47, 1990.)

Dantzig sollte abnehmen: $\leq$ 1500 Kalorien pro Tag. Hatte Angst vor Hungergefühl und wollte daher das Sättigungsgefühl maximieren. Er wählte die Zielfunktion

$$\text{Nichtwassermenge} = (1 - \text{Wassergehalt von 1kg NM1})x_1 + \ldots$$

Lösung 1: 500 Gallonen Essig pro Tag. Warum? In den Daten stand, dass Essig kaum Kalorien hätte und kein Wasser enthalte. Dantzig strich Essig.
Lösung 2: 200 Brühwürfel. Er probierte eine Suppe mit 4 Brühwürfeln; total versalzen. Obere Schranke von drei Brühwürfeln.
Lösung 3: 2 Pfund Kleie pro Tag. Seine Frau verbot ihm, so viel Kleie zu essen. Obere Schranke für Kleie.
Lösung 4: 2 Pfund Molasse
Lösung 5: Schließlich wurde es seiner Frau zu bunt und sie übernahm das Regime. Dantzig nahm 22 Pfund (amerikanische Pfund) ab.

Speiseplan, Modellierung von Abwechslung

Wir nehmen Gerichte als die Bestandteile des Speiseplans.
x_i = Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i servieren.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + \ldots + x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \leq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} \leq 52, \ldots$ Abwechslung
- Alles andere wie bisher.
- Problem: was bedeutet 3,37 mal Spaghetti?
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung: Aber ganzzahlige Optimierung ist viel schwerer.
- Lösung 2: finde optimale reelle Lösung. Runde Zahlen auf/ab zur nächsten ganzen Zahl.

Speiseplan, Modellierung von Abwechslung

Wir nehmen Gerichte als die Bestandteile des Speiseplans.
x_i = Anzahl der Tage, an denen wir Gericht i servieren.

Zusätzliche Nebenbedingungen:

- $x_1 + \ldots + x_n = 365$, Speiseplan für ein Jahr
- $x_i \leq 26$, höchstens einmal alle zwei Wochen
- $\sum_{i \in \text{Nudelgerichte}} x_i \leq 52$, $\sum_{i \in \text{Fischgerichte}} \leq 52, \ldots$ Abwechslung
- Alles andere wie bisher.
- Problem: was bedeutet 3,37 mal Spaghetti?
- Lösung 1: x_i ganzzahlig als zusätzliche Nebenbedingung: Aber ganzzahlige Optimierung ist viel schwerer.
- Lösung 2: finde optimale reelle Lösung. Runde Zahlen auf/ab zur nächsten ganzen Zahl.

Zusammenfassung

- Lineare Optimierung (= Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in *n* Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen)) ist sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Lineare Optimierung (man ist nur in ganzzahligen Lösungen interessiert) ist noch viel ausdrucksstärker, aber schwerer lösbar.
- Ergebnis nie besser als das Modell und die Daten. Das gilt auch für Simulation.
  - Klimasimulation
  - Stresstest bei Banken

Zusammenfassung

- Lineare Optimierung (= Maximierung (Minimierung) einer linearen Funktion in n Variablen unter Nebenbedingungen (Nebenbedingungen sind Gleichungen und Ungleichungen)) ist sehr ausdrucksstark und effizient lösbar.
- Ganzzahlige Lineare Optimierung (man ist nur in ganzzahligen Lösungen interessiert) ist noch viel ausdrucksstärker, aber schwerer lösbar.
- Ergebnis nie besser als das Modell und die Daten. Das gilt auch für Simulation.
  - Klimasimulation
  - Stresstest bei Banken