Binärzahlen, Addition und Multiplikation

Ideen und Konzepte der Informatik

Kurt Mehlhorn

max planck institut
informatik

Saarland Informatics Campus

Binärzahlen, Addition und Multiplikation

- Dezimaldarstellung von Zahlen
- Binärdarstellung von Zahlen
- Addition von Binärzahlen
- Ein Schaltkreis für die Addition
- Multiplikation von Binärzahlen

Dezimalzahlen

Wir sind alle mit Dezimalzahlen vertraut, etwa

- in Worten: vier tausend sieben hundert fünfundzwanzig
- mit Ziffern: 4725

Dezimalzahlen benutzen die Ziffern 0 bis 9.

Die Wertigkeit der Stellen sind von hinten nach vorne: Eins, Zehn, Hundert, Tausend, Zehntausend, $\ldots$.

Also 4725 = 4 x Tausend + 7 x Hundert + 2 x Zehn + 5 x Eins.

$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$, $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$, $10 = 10^1$, $1 = 10^0$.

Also $4725 = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 100^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

10 heißt **Basis**. Dezimalzahlen sind Zahlen zur Basis 10. Die Wertigkeiten der Stellen sind die Potenzen von 10.

Um mit Dezimalzahlen rechnen zu können, muss man das kleine Einmaleins lernen.

Binärzahlen

Dezimalzahlen benutzen die Basis 10. Es gibt die Ziffern 0 bis 9. Die Stellen haben die Wertigkeiten 10^0, 10^1, 10^2, ...

Also $4725_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$.

Binärzahlen benutzen die Basis 2. Es gibt die Ziffern 0 und 1 (Bits).
Die Stellen haben die Wertigkeiten $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, 16, 32, 64, ...

Also

$$\begin{aligned} 111101_2 &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 32 + 16 + 8 + 4 + 1 = 61_{10} \end{aligned}$$

Weitere Beispiele: $0_2 = 0_{10}$, $1_2 = 1_{10}$, $10_2 = 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 2_{10}$, $11_2 = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$, $100_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4$.

Addition von Dezimalzahlen

Erster Summand	4	5	7	1
Zweiter Summand	9	7	8	6
Überträge				0
Summe				

- Wir addieren stellenweise von rechts nach links.
- An jeder Stelle addieren wir drei Ziffern, die Ziffern der beiden Summanden und den Übertrag aus der Stelle davor.
- Der Übertrag in die letzte Stelle ist Null.

Addition von Binärzahlen

Erster Summand	1	0	1	0
Zweiter Summand	1	1	0	1
Überträge				0
Summe				

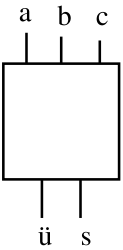
- Wir addieren stellenweise von rechts nach links.
- An jeder Stelle addieren wir drei Ziffern, die Ziffern der beiden Summanden und den Übertrag aus der Stelle davor.
- Der Übertrag in die letzte Stelle ist Null.
- Spaltensummen:

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0\;\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 1\;\;0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 1\;\;1 \end{array}$$

- Es gibt nur vier Fälle, keine Eins, eine Eins, zwei Einsen, drei Einsen: Die Summen sind entsprechend 00_2, 01_2, 10_2 und 11_2.

Ein Schaltkreis für die Addition

Nehmen wir nun an, wir hätten ein Gerät (Schaltkreis) Volladdierer (VA), der 3 Bits addieren kann und die Summe als Binärzahl mit zwei Bits ausgibt.



$$\begin{array}{rr} & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 0 \\ & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 1 \\ & 0 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rr} & 1 \\ & 1 \\ & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Das Innenleben eines VA: siehe Übungen.

Schaltkreis für die Addition = hintereinander geschaltete VA.

Multiplikation von Binärzahlen

- Das kleine Einmaleins: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ und $1 \cdot 1 = 1$.
- Daher Zahl mal 0 = 0 und Zahl mal 1 = Zahl,

  etwa $1011 \cdot 0 = 0$ und $1011 \cdot 1 = 1011$.

- $1011 \cdot 1101 =$ $$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & & \\ \hline \end{array}$$

- Wir müssen vier Zahlen addieren, aber wir können doch nur 2 Zahlen addieren. Was tun?
- Paarweise zusammenfassen, bis nur noch eine Zahl überbleibt.