max planck institut
informatik

Combining
Linear Arithmetic
&
First-Order Logic

Perspektivenvorlesung WS 09/10

Christoph Weidenbach

Mathematik 9. Klasse

Gerda war vor einem Jahr doppelt so alt wie Herbert.
In zwei Jahren wird sie 1,5-mal so alt sein wie Herbert.
Wie alt sind die beiden heute?

Fourier Motzkin

BOOL FM(Menge N von LA Atomen) {

falls $N = \emptyset$ dann return 1;

falls N keine Variablen mehr enthält return (Wert von N);

sonst {

wähle eine Variable x aus N

transformiere alle Atome mit x nach $t \lesssim x$ oder $x \lesssim s$

und der Teilmenge N' von N die keine Atome mit x enthält

berechne $N^* = \{t \lesssim s \mid \text{für alle } t \lesssim x \text{ und } x \lesssim s \text{ aus } N\}$

wobei $t \lesssim s$ strikt, sobald $t \lesssim x$ oder $x \lesssim s$ strikt

return FM($N' \cup N^*$);

}

}

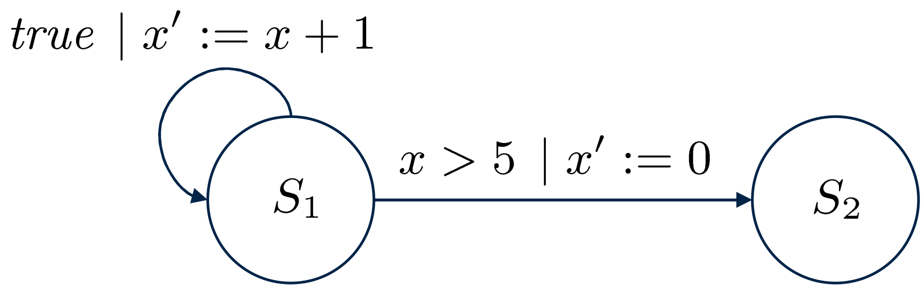
Lineare Arithmetik

- Terme über ganzen Zahlen, Variablen und $+, -$: $5x - 4y + 2$
- Atome über $\geq, >, \leq, <$: $5x - 4y + 2 \geq 0$
- Formeln über $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$:

$$\begin{array}{rl} \exists x, y \; [& x - 1 \geq 2(y - 1) \\ \wedge & x - 1 \leq 2(y - 1) \\ \wedge & x + 2 \leq 1.5(y + 2) \\ \wedge & x + 2 \geq 1.5(y + 2) \;] \end{array}$$

- Interpretiert über $\mathbb{Q}$

Transitionssysteme



Eigenschaft des Transsitionssystems: $x < 7$

Beweise: $(x < 7 \wedge x \leq 5 \wedge x' = x + 1) \rightarrow x' < 7$

$$(x < 7 \wedge x > 5 \wedge x' = 0) \rightarrow x' < 7$$

Resultate und Offene Fragen

- Lösbarkeit von Konjunktionen in polynomialer Zeit
- Lösbarkeit von Formeln braucht mindestens exponentielle Zeit

- Optimierung
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- nicht lineare Probleme
- Probleme über $\mathbb{Z}$: Lösen von Formeln braucht mindestens doppelt exponentielle Zeit

Lineare Arithmetik vs. Logik erster Stufe

	Lineare Arithmetik	Logik Erster Stufe
Funktionen	$+, -$	beliebige
Prädikate	$\leq$, $<$	beliebige
Bedeutung	fix	frei
Junktoren	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$	$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \exists, \forall$

Bedeutung freier Symbole

$$[S(0) \land \forall x\, [S(x) \rightarrow S(f(x))]] \rightarrow S(f(f(0)))$$

Forwarding

```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe

Microsoft Windows XP [Version 5.1.2600]
(C) Copyright 1985-2001 Microsoft Corp.

C:\Documents and Settings\weidenb>ipconfig

Windows IP Configuration


Ethernet adapter VMware Network Adapter VMnet8:

        Connection-specific DNS Suffix  . :
        IP Address. . . . . . . . . . . . : 192.168.9.1
        Subnet Mask . . . . . . . . . . . : 255.255.255.0
        Default Gateway . . . . . . . . . :

Ethernet adapter VMware Network Adapter VMnet1:

        Connection-specific DNS Suffix  . :
        IP Address. . . . . . . . . . . . : 192.168.30.1
        Subnet Mask . . . . . . . . . . . : 255.255.255.0
        Default Gateway . . . . . . . . . :

Ethernet adapter Local Area Connection 2:

        Media State . . . . . . . . . . . : Media disconnected

Ethernet adapter Wireless Network Connection:

        Connection-specific DNS Suffix  . :
        IP Address. . . . . . . . . . . . : 10.29.29.9
        Subnet Mask . . . . . . . . . . . : 255.255.255.0
        Default Gateway . . . . . . . . . : 10.29.29.1

C:\Documents and Settings\weidenb>_
```

Forwarding Rule

$$
\begin{array}{l}
\text{RouteIPPacket(route\_ip\_packet(x\_host,} \\
\qquad \text{ippacket(x\_ip\_src, x\_ip\_dst, x\_ip\_proto, x\_ip\_payload))) } \wedge \\
\text{Interface(interface(x\_host,x\_ip\_host,x\_netmask,x\_mac\_src,x\_segment)) } \wedge \\
\text{RouteEntry(route(x\_host,x\_route\_mask,x\_dst\_net\_addr,local,first\_route)) } \wedge \\
\text{ipand(x\_ip\_dst,x\_route\_mask)} = \text{x\_dst\_net\_addr } \wedge \\
\text{ipand(x\_ip\_host,x\_netmask)} = \text{ipand(x\_ip\_dst,x\_netmask))} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \to \\
\text{SendIPPacket(send\_ip\_packet(x\_host,} \\
\qquad \text{x\_ip\_dst,ippacket(x\_ip\_src,x\_ip\_dst,x\_ip\_proto,x\_ip\_payload)))}
\end{array}
$$

Logisches IP And

$$\text{ipand}(\text{ip}(x_0,\ldots,x_{31}),\text{ip}(y_0,\ldots,y_{31})) = \text{ip}(\text{land}(x_0,y_0),\ldots,\text{land}(x_{31},y_{31})) \land$$

$$\text{land}(0,x) = 0 \land \text{land}(x,0) = 0 \land$$

$$\text{land}(1,x) = x \land \text{land}(x,1) = x \land$$

$$\text{land}(x,y) = 0 \rightarrow x{=}0 \lor y{=}0 \land$$

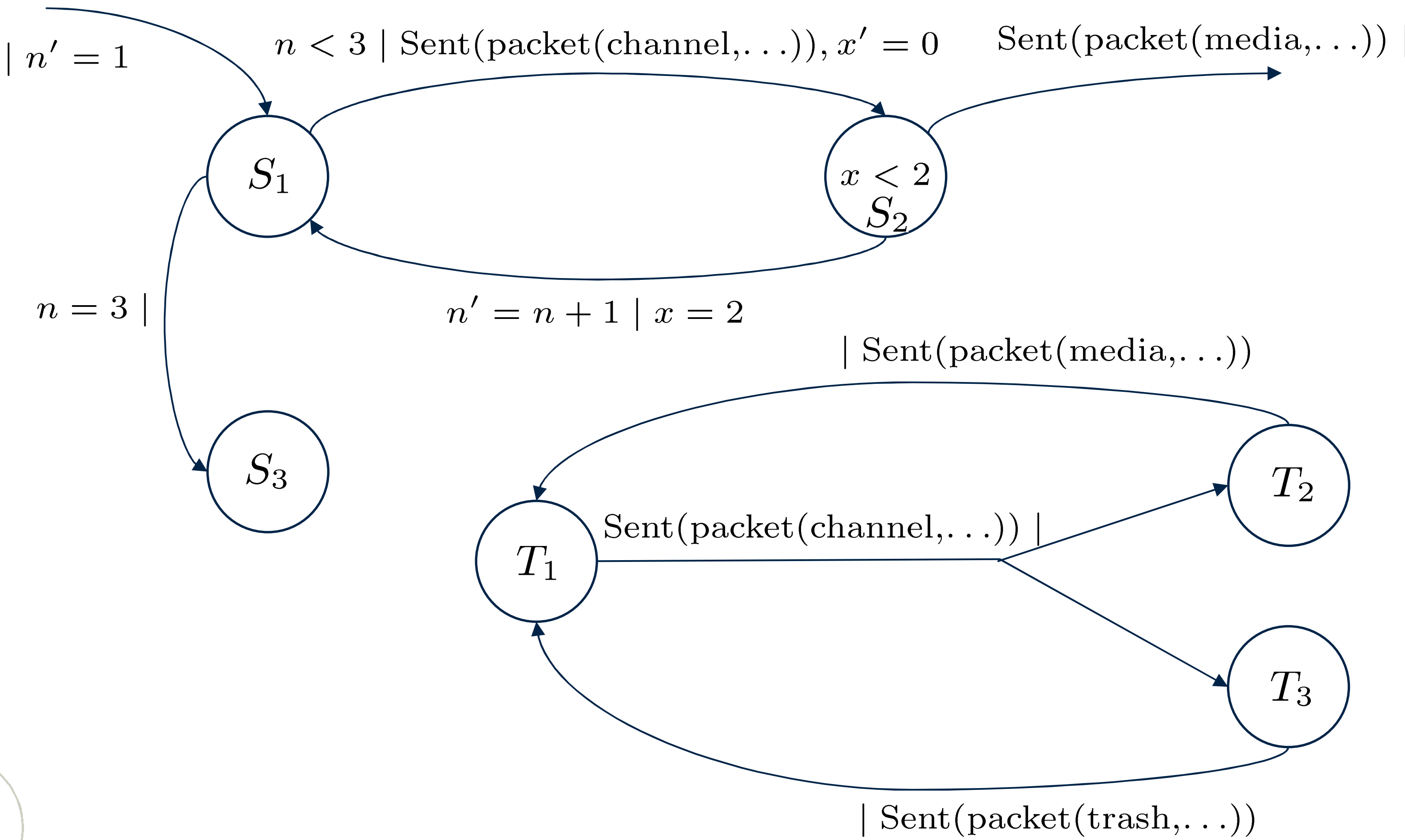
$$\text{land}(x,y) = 1 \rightarrow x{=}1 \land y{=}1$$

Resultate und Offene Fragen

- Gültigkeit von allquantifizierten Konjunktionen ist entscheidbar
- Lösbarkeit von Formeln unentscheidbar
- Probleme über $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ lassen sich nicht immer formulieren

- entscheidbare Teilklassen
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- Kombinationen

Kombination Lineare Arithmetik & Logik erster Stufe

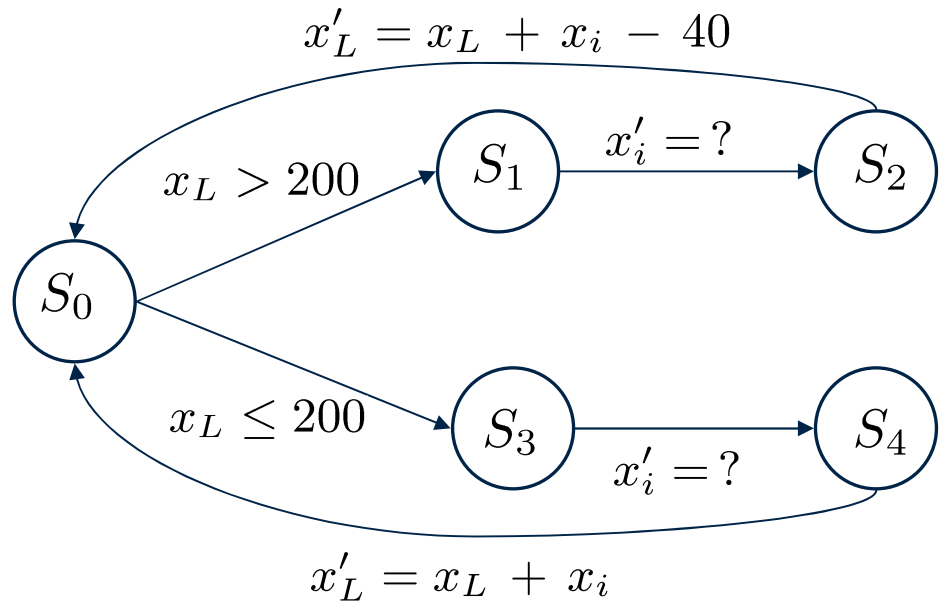


Resultate und Offene Fragen

- Kombination hat im Allgemeinen keine guten Eigenschaften
- entscheidbar unter zusätzlichen Einschränkungen
- sehr mächtige Sprache

- entscheidbare Teilklassen für Kombinationen
- „praktisch“ gut funktionierende Algorithmen
- Kombinationen von Teilsprachen
- probabilistische Erweiterungen

Wassertanksteuerung



$$[x_L > 200 \wedge S_0(x_L, x_i)] \rightarrow S_1(x_L, x_i)$$

$$S_1(x_L, x_i) \rightarrow S_2(x_L, x'_i)$$

$$[x'_L = x_L + x_i - 40 \wedge S_2(x_L, x_i)] \rightarrow S_0(x'_L, x_i)$$

The End

Danke für Ihre Aufmerksamkeit